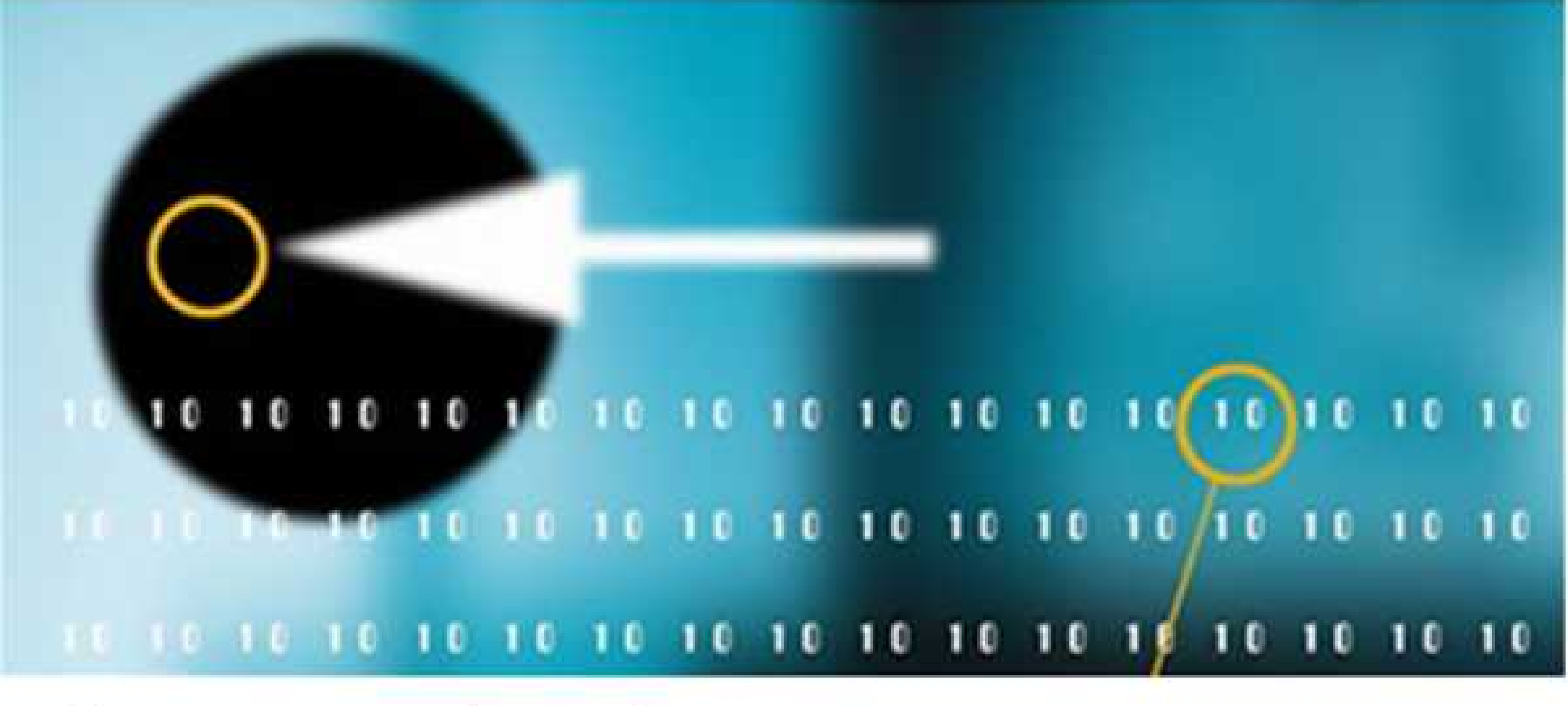


Smarandache
未解决问题研究

李江华 郭艳春 著

High American Press
2009



Smarandache
未解决问题研究

编者：

李江华

西北大学数学系

郭艳春

咸阳师范学院数学系

译者：

王锦瑞

杨衍婷

刘艳艳

西北大学数学系

High American Press
2009

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

Books on Demand
ProQuest Information & Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road
P.O. Box 1346, Ann Arbor
MI 48106-1346, USA
Tel.: 1-800-521-0600 (Customer Service)
http://wwwlib.umi.com/bod/basic

Peer Reviewers:
Wenpeng Zhang , Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, Shannxi, P.R. China.
Wenguang Zhai, Department of Mathematics, ShanDong Teachers' University, Jinan, Shandong, P.R.China.
Guodong Liu, Department of Mathematics, Huizhou University, Huizhou, Guangdong, P.R.China.

ISBN: 978-1-59973-103-2

Standard Address Number: 297-5092
Printed in the United States of America

前　言

数论这门学科最初是从研究整数开始的, 所以叫做整数论. 后来整数论又进一步发展, 就叫做数论了. 确切的说, 数论就是一门研究整数性质的学科. 它是最古老的数学分支. 按照研究方法来说, 数论可以分成初等数论, 解析数论, 代数数论, 超越数论, 计算数论, 组合数论等.

初等数论所包含的一个重要内容是研究数论函数的各种性质, 而著名的Smarandache函数$S(n)$ 是重要的数论函数之一, 它是由美籍罗马尼亚著名数论专家F. Smarandache 教授提出的. 此外, 在1991年美国研究出版社出版的《只有问题, 没有解答》一书中, F. Smarandache教授提出了105 个关于特殊数列、算术函数等未解决的数学问题及猜想. 随着这些问题的提出, 许多学者对此进行了深入的研究, 并获得了不少具有重要理论价值的研究成果.

本书主要内容是作者在西北大学攻读硕士学位期间所发表的研究论文的汇编, 包括Smarandache 函数的均值分布、伪Smarandache 函数的性质及其孪生素数等一些问题. 关于这些问题, 作者都仔细分析了它们的背景、研究现状、问题来源. 在每一章节中还列举了国内外学者对各个相关问题的最新动态和研究成果, 同时还提出了关于这些函数的一些新问题. 另外, 应美国出版社High American Press 的要求在第七章我们翻译了部分国外最新Smarandache 理论研究的现状及其各类应用. 有兴趣的读者可以对这些问题进行研究, 从而开拓读者的视野, 引导和激发读者对这些领域的研究兴趣.

最后对我的导师张文鹏教授在我求学历程中对我的热情鼓励, 悉心指导致以深深的谢意! 在本书的编写过程中， 薛艳荣, 王妤, 刘艳妮等师姐妹们也给予了热情的帮助和支持, 同时, 本书得到西北大学研究生自主创新教育项目(08YZZ30)的资助， 在此我致以最真诚的谢意!

编者

2009年4月

目录

第一章 Smarandache函数

1.1 引言

本章主要研究一些关于smarandache函数及其复合函数的均值, 分布及相关问题和性质. 包括Smarandache函数值的分布, F.Smarandache可乘数函数的均值, F.Smarandache LCM 函数的主值等. 其中前6节为编者在攻读硕士期间的研究成果. 最后一节为近期国内其他作者研究smarandache函数性质的几个最新结果.

1.2 关于F.Smarandache可乘数函数的一类均值

设n 为任意正整数, 一个算术函数$f(n)$ 称为F.Smarandache 可乘的, 如果$f(1)=1$, 当$n>1$ 且$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$ 的标准分解式, 有$f(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{f(p_i^{\alpha_i})\}$. 例如函数$S(n)=\min\{m:\ m\in N,\ n|m!\}$是F.Smarandache可乘函数. 因为从$S(n)$ 的定义, 我们很容易推断出如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是n 的标准素因数分解式, 那么

$$S(n)=\max_{1\le i\le k}\left\{S(p_i^{\alpha_i})\right\}.$$

所以说$S(n)$ 是F.Smarandache 可乘函数, 它的前几个值是$S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $\cdots\cdots$. 关于$S(n)$ 的算术性质，有不少学者进行过研究, 获得了许多有重要理论价值的研究成果, 参阅文献[2], [3], [4] 及[5]. 例如, Farris Mark 和Mitchell Patrick 在文献[2] 中研究了$S(n)$ 的有界性问题，得出了$S(p^{\alpha})$ 的上下界估计. 即就是证明了：

$$(p-1)\alpha+1\le S(p^{\alpha})\le(p-1)[\alpha+1+\log_p\alpha]+1.$$

Lu Yaming [3]中研究了一个包含$S(n)$ 的方程的可解性问题，证明了对任意正整数$k\ge 2$, 方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$.

Jozsef Sandor [4] 中进一步证实对任意正整数$k \geq 2$, 存在无限多组正整数$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$满足不等式：

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) > S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k).$$

同样又存在无限多组正整数$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$ 使得

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) < S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k).$$

徐哲峰在文献[5] 中研究了$S(n)$ 的值分布问题, 获得了一个更深刻的结果. 即就是证明了下面的定理:

设$P(n)$ 表示n 的最大素因子, 则对任意实数$x > 1$, 我们有渐近公式:

$$\sum_{n \leq x} (S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right) x^{\frac{3}{2}}}{3 \ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right), \tag{1-1}$$

其中$\zeta(s)$ 表示Riemann zeta-函数.

此外, 当$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准素因数分解式时, 我们令

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\}.$$

显然这个函数也是F.Smarandache 可乘函数, 它称作F.Smarandache LCM 函数. 关于这个函数的性质, 也有不少学者进行过研究, 参阅文献[6], [7] 和[8].

本文研究另一个F.Smarandache可乘函数$\overline{S}(n)$ 的均值问题, 根据文献[9], 我们定义$\overline{S}(n)$ 如下:$\overline{S}(1) = 1$, 当$n > 1$ 且$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 为n 的标准素因数分解式时, 我们令:

$$\overline{S}(n) = \max\{\alpha_1 p_1,\ \alpha_2 p_2,\ \alpha_3 p_3,\ \cdots,\ \alpha_k p_k\}.$$

容易验证这个函数是F.Smarandache 可乘函数. 关于它的初等性质, 不少学者也进行过研究, 如文献[6] 中指出在(1) 式中用$\overline{S}(n)$ 替换$S(n)$ 结论同样成立. 文献[9] 中还证明了下面的结论: 设k 为任意正整数. 那么对任意实数$x > 1$, 我们有渐近公式：

定理1.1 对任意实数$x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in N\\ \overline{S}(n)\leq x}} 1 = e^{c\cdot\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right)},$$

其中$c=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$ 是一个常数.

证明 在这一部分, 我们用初等方法及素数定理直接给出定理的证明. 设x 是实数且$x>2$, 那么对任意素数$p\leq x$, 显然存在唯一的正整数$\alpha=\alpha(p)$ 使得

$$\alpha(p)\cdot p\leq x<(\alpha(p)+1)\cdot p$$

或者

$$\alpha(p)=\left[\frac{x}{p}\right].$$

由函数$\overline{S}(n)$ 的性质知如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是n 的标准素因子分解式, 那么当$\overline{S}(n)\leq x$ 时对于任意$d|n$ 都有$\overline{S}(d)\leq x$. 此外, 对任意正整数m 和n，当$(m,n)=1$ 且$\overline{S}(m)\leq x$, $\overline{S}(n)\leq x$ 时, 由函数$\overline{S}(n)$ 的定义不难推出$\overline{S}(mn)\leq x$. 所以当$\alpha(p)=\left[\frac{x}{p}\right]$ 时,设$m=\prod\limits_{p\leq x}p^{\alpha(p)}$, 则所有满足$\overline{S}(n)\leq x$ 的正整数n 都是m 的因子. 设N 表示所有正整数集合, 则通过前面分析以及除数函数的性质我们有

$$\sum_{\substack{n\in N\\ \overline{S}(n)\leq x}} 1=\sum_{d|m}1=d(m)=\prod_{p\leq x}\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)=e^{\sum\limits_{p\leq x}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)}. \quad (1\text{-}2)$$

设$k=[\ln^2 x]$, 那么应用素数定理(参阅文献[10] 和[11])

$$\pi(x)=\sum_{p\leq x}1=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

我们可得

$$\sum_{p\leq x}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{\frac{x}{\ln^2 x}<p\leq x}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)+\sum_{p\leq\frac{x}{\ln^2 x}}\ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\frac{x}{\ln^2 x}<p\le x} \ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)+O\left(\sum_{p\le\frac{x}{\ln^2 x}}\ln x\right)\\
&= \sum_{n=1}^{k-1}\sum_{\frac{x}{n+1}<p\le\frac{x}{n}} \ln\left(1+\left[\frac{x}{p}\right]\right)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{k-1}\sum_{\frac{x}{n+1}<p\le\frac{x}{n}} \ln(1+n)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{k-1}\left[\frac{x}{n\ln\frac{x}{n}}-\frac{x}{(n+1)\ln\frac{x}{n+1}}\right]\ln(n+1)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{x}{\ln x}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right)\\
&= C\cdot\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right), \qquad (1\text{-}3)
\end{aligned}$$

其中$c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}$ 是一个常数.

结合(1-2) 及(1-3) 式立刻得到渐近公式

$$\sum_{\substack{n\in N\\ \overline{S}(n)\le x}} 1 = e^{c\cdot\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}\right)}.$$

于是完成了定理的证明.

由我们的定理及素数定理并注意到$y\longrightarrow 0$ 时$e^y=1+O(y)$ 立刻得到

$$\left[\sum_{\substack{n\in N\\ \overline{S}(n)\le x}} 1\right]^{\frac{1}{\pi(x)}} = e^{c+O\left(\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}\right)} = e^c+O\left(\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}\right).$$

在上式中取$x\longrightarrow\infty$ 不难得到如下的推论:

推论1.1 对任意实数$x > 1$, 设$\pi(x)$ 表示所有不大于x 的素数的个数, 则我们有极限公式:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left[\sum_{\substack{n\in N\\ \overline{S}(n)\leq x}} 1\right]^{\frac{1}{\pi(x)}} = e^c.$$

1.3 Smarandache函数值的分布

对任意正整数n, 著名的Smarandache函数$S(n)$ 定义为最小的正整数m 使得$n|m!$, 即$S(n) = \min\{m:\ n|m!,\ m \in N\}$. 从函数$S(n)$ 的定义, 我们很容易推断出如果$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是n 的标准素因数分解式, 那么

$$S(n) = \max_{1\leq i\leq k}\left\{S(p_i^{\alpha_i})\right\}.$$

. 从这个公式我们可以得出: $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$, $S(4) = 4$, $S(5) = 5$, $S(6) = 3$, $S(7) = 7$, $S(8) = 4$, $S(9) = 6$, $S(10) = 5$, $S(11) = 11$, $S(12) = 4$, $S(13) = 13$, $S(14) = 7$, $S(15) = 5$, $S(16) = 6$, $\cdots\cdots$.

在这一节, 作为[5] 式的注释, 我们将研究Smarandache 函数$S(n)$ 的一个新的值分布的性质, 并且获得一个新的较强的渐进公式. 即就是, 我们证明了如下的:

定理1.2 设k 是给定的正整数且$k \geq 2$. 那么对任意的实数$x \geq 3$, 我们有如下的渐进公式:

$$\sum_{n\leq x}\left(S(n^k) - kP(n)\right)^2 = \frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$\zeta(s)$ 是*Riemann zeta*-函数, O_k 表示常数值仅仅取决于k 的大-O .

定理1.3 对任意的实数$x \geq 3$, 我们也有

$$\sum_{n\leq x}\left(SM(n^k) - kP(n)\right)^2 = \frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中算术函数$SM(n)$ 定义作$SM(1)=1$, 且$SM(n)=\max_{1\leq i\leq k}\{\alpha_i p_i\}$, 如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是n 标准分解式.

1.3.1 几个引理

为了证明上面的定理, 我们需要下面的几个引理. 首先我们有

引理1.3.1 设k 是给定的正整数且$\sqrt{n}>k\geq 2$. 那么我们有

(i) 如果$P(n)>\sqrt{n}$, 那么$S(n^k)=SM(n^k)=kP(n)$.

(ii) 如果$n=mp_1P(n)$, 且$n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\leq\sqrt{n}$, 那么$S(n^k)=SM(n^k)=kP(n)$.

(iii) 如果$n=mP^2(n)$ 且$n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leq\sqrt{n}$, 那么$S(n^k)=SM(n^k)=2kP(n)$.

证明 我们只证明$S(n^k)$ 的结果. 类似的, 我们可以推导出$SM(n^k)$. 现在证明(i). 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}P(n)$ 是n的标准分解式. 由于$P(n)>\sqrt{n}$, 我们有$p_1^{k\alpha_1}p_2^{k\alpha_2}\cdots p_{r-1}^{k\alpha_{r-1}}<\sqrt{n^k}<P^k(n)$, 并且$p_i^{k\alpha_i}|(kP(n))!$, $i=1, 2, \cdots, r-1$. 于是$n^k \mid (kP(n))!$. But $P^k(n)\dagger(kP(n)-1)!$. 所以, $S(n^k)=S(P^k(n))=kP(n)$.

这样就证明了引理1.3.1的(i) 式.

从$n^{\frac{1}{3}}<p_1<P(n)\leq\sqrt{n}$ 和证明结论(i)的方法我们很容易得到引理1的(ii)式. 那就是, $S(n^k)=kP(n)$.

如果$n=mP^2(n)$ and $n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leq\sqrt{n}$, 那么$m<P(n)$. Since $P^{2k}(n)|(2kP(n))!$, 于是$m^k|(2kP(n))!$. 然而$P^{2k}(n)\dagger(2kP(n)-1)!$, 所以$S(n^k)=2kP(n)$.

这样我们就证明了引理1.3.1.

引理1.3.2 设k 是给定的正整数且$k\geq 2$. 于是对任意的实数$x\geq 3$, 我们有估计式

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}}\left(S(n^k)-kP(n)\right)^2\ll k^2x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x$$

和

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}}\left(SM(n^k)-kP(n)\right)^2\ll k^2x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x.$$

证明 设$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$是$n$ 的标准分解式, 那么$S(n^k) = \max\limits_{1\le i\le r}\{S(p_i^{k\alpha_i})\}$. 设$k\alpha p = \max\limits_{1\le i\le r}\{k\alpha_i p_i\}$, 那么$S(n^k) \ll kp\ln n$. 注意到$\alpha = 1$, 于是$kp = kP(n)$, 所以$S(n^k) - kP(n) = 0$, 并且我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le n^{\frac{1}{3}}}} (S(n^k) - kP(n))^2 \ll \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le n^{\frac{1}{3}},\ P^2(n)|n}} k^2P^2(n)\ln^2 x$$

$$\ll \sum_{\substack{np^2\le x\\ p\le x^{\frac{1}{3}}}} k^2p^2\ln^2 x \ll \sum_{p\le x^{\frac{1}{3}}} p^2 \sum_{n\le \frac{x}{p^2}} k^2\ln^2 x = O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right).$$

这样我们就证明了引理1.3.2.

引理1.3.3 设p 是一个素数, m 是一个正整数且$m \le x^{\frac{1}{3}}$. 那么我们有

$$\sum_{m\le p\le\sqrt{\frac{x}{m}}} p^2 = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x - \ln m)} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}\right)}\right).$$

.

证明 这个渐进公式我们可以从Abel 恒等式得到(参考文献[13]的定理4.2)

1.3.2 证明

在这一部分, 我们将彻底的证明上面的定理. 我们只证明定理1.2. 类似的, 我们可以推导出定理1.3. 从引理1.3.1 我们知道如果$P(n) > \sqrt{n}$, 那么$S(n^k) = SM(n^k) = kP(n)$. 于是, 结合引理1.3.1 和引理1.3.2 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\left(S(n^k) - kP(n)\right)^2 \\
=& \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)>\sqrt{n}}}\left(S(n^k) - kP(n)\right)^2 + \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le\sqrt{n}}}\left(S(n^k) - kP(n)\right)^2 \\
=& \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le\sqrt{n}}}\left(S(n^k) - kP(n)\right)^2
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le n^{\frac{1}{3}}}} \left(S(n^k)-kP(n)\right)^2 + \sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}} \left(S(n^k)-kP(n)\right)^2$$

$$= \sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}} \left(S(n^k)-kP(n)\right)^2 + O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right). \tag{1-4}$$

注意到如果$n^{\frac{1}{3}} < P(n) \le \sqrt{n}$, 那么有如下三种情形:

(a) $n = m\cdot P^2(n)$ 且$m < P(n)$.

(b) $n = m\cdot p_1\cdot P(n)$ 且$m < n^{\frac{1}{3}} < p_1 < P(n)$.

(c) $n = m\cdot P(n)$ 且$P(m) \le n^{\frac{1}{3}}$.

从(b) 和(c), 如果$S(n^k) = kP(n)$, 那么(1) 中的和式等于0. 如果$S(n^k) \ne kP(n)$, 那么肯定存在一个素数p 使得$p^\alpha|m$, $\alpha \ge 2$ 且$\alpha p > P(n)$. 于是, 我们有$p < n^{\frac{1}{3}}$. 根据引理1.3.2 的估计方法, 我们可以推导出(b)中的次幂不会超过$x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x$. 于是, 从引理1.3.1 的(iii) 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}} \left(S(n^k)-kP(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}} \left(S(m^kp^{2k})-kP(m^kp^{2k})\right)^2\\
+&\sum_{\substack{mp_1p_2\le x\\ (mp_1p_2))^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le\sqrt{mp_1p_2}}} (S(mp_1p_2)-kP(mp_1p_2))^2 + O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right)\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\le\sqrt{mp^2}}} (k^2p^2) + O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right)\\
=&\sum_{m<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}} k^2p^2 + O_k\left(x^{\frac{4}{3}}\ln^2 x\right).
\end{aligned} \tag{1-5}$$

现在应用引理1.3.3 我们有

$$\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m^2<k^2p^2\le\frac{x}{m}} k^2p^2 = \sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2k^2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)} + O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2 x}\right)\right)$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}\sum_{m\le e^{\sqrt{\ln x}}}\frac{k^2}{m^{\frac{3}{2}}}+O_k\left(\sum_{e^{\sqrt{\ln x}}\le m\le x^{\frac{1}{3}}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln x}\right)+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

$$= \frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right). \tag{1-6}$$

结合(1-4), (1-5) 和(1-6) 我们很容易得到渐进公式

$$\sum_{n\le x}\left(S(n^k)-kP(n)\right)^2=\frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

这样便证明了定理1.2

用同样的方法我们可以证明定理1.3.

1.4 Smarandache函数$d_f(n)$ 的均值

在本节我们定义另一个F.Smarandache 函数$d_f(n)$ 如下: $d_f(n)$ 表示最小的正整数m 使得$n|m!!$，即为$d_f(n)=\min\{m\in N:\ n|m!!\}$. 关于这个函数的初等性质, 我们目前知道的很少, 甚至还不知道是否有人研究这一问题. 在文献[14]中, Kenichiro Kashihara 介绍了这一函数, 同时建议我们研究函数$S(n)$ 与$d_f(n)$ 之间的关系. 由这两个函数函数的定义不难推出

$$d_f(n)!\ge S(n)>(d_f(n)-1)!$$

所以我们有

$$d_f(n)=\min\{m:\ m!\ge S(n)\}.$$

显然这是函数$S(n)$ 与$d_f(n)$ 之间的一个简单关系.

本文的主要目的是利用初等及解析方法研究函数$d_f(n)$ 的均值性质, 并给出一个较强的渐近公式. 具体地说也就是证明下面的:

定理1.4 设n 为任意的正整数, 则对任意实数$x\ge 1$ 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}d_f(n)=\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

证明 这节我们直接给出定理的证明. 根据函数$S(n)$ 的性质及$d_f(n)$的定义显然有

$$d_f(n)! \geq S(n) \geq (d_f(n)-1)!.$$

对该式两边取对数可得

$$\sum_{i \leq d_f(n)} \ln i \geq \ln S(n) \geq \sum_{i \leq d_f(n)-1} \ln i.$$

由文献[11]中Euler 求和公式我们有:

$$\sum_{i \leq d_f(n)} \ln i = m \ln m - m + O(\ln m),$$
$$\sum_{i \leq d_f(n)-1} \ln i = m \ln m - m + O(\ln m)$$

于是

$$m \ln m - m + O(\ln m) \geq \ln S(n) \geq m \ln m - m + O(\ln m),$$

所以

$$\ln S(n) = m \ln m - m + O(\ln m), \tag{1-7}$$

即

$$m = \frac{\ln S(n)}{\ln m - 1} + O(1).$$

由(1-7)还可推出$\ln m \sim \ln \ln S(n)$, 那么

$$\begin{aligned} m &= \frac{\ln S(n)}{\ln \ln S(n) - 1} + O(1) \\ &= \frac{\ln S(n)}{\ln \ln S(n)} + O\left(\frac{\ln S(n)}{\ln^2 \ln S(n)}\right). \end{aligned} \tag{1-8}$$

因为$m = d_f(n)$，所以由（1-8）式可得

$$\sum_{n \leq x} d_f(n) = \sum_{n \leq x} \frac{\ln S(n)}{\ln \ln S(n)} + O\left(\sum_{n \leq x} \frac{\ln S(n)}{\ln^2 \ln S(n)}\right).$$

而

$$\sum_{n\leq x}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}\leq\sum_{n\leq x}\frac{\ln n}{\ln\ln n}.$$

则有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}\leq\sum_{n\leq x}\frac{\ln n}{\ln\ln n} &= \frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln\ln x}\right)\\ &\leq \frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{\ln^2\ln x}\right). \end{aligned}\tag{1-9}$$

对任意正整数n, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ 表示n 的素幂分解. 我们将所有$1\leq n\leq x$ 的正整数n 分为两个子集合A 和B，其中集合A 包含区间$[1,\ x]$ 中所有满足$\alpha_i\geq 2$ 的正整数n，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$. 而集合B 包含区间$[1,\ x]$ 中所有不属于集合A 的那些正整数，那么

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)}.\tag{1-10}$$

由函数$S(n)$ 的性质我们可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} &\ll \sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}\frac{\ln x}{\ln\ln x}\ll\frac{\ln x}{\ln\ln x}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}1\\ &\ll \frac{\sqrt{x}\ln x}{\ln\ln x}\ll O\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x}\right). \end{aligned}\tag{1-11}$$

此外，

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}\frac{\ln S(n)}{\ln\ln S(n)} &= \sum_{\substack{np\leq x\\ (n,\ p)=1}}\frac{\ln S(np)}{\ln\ln S(np)}>\sum_{\substack{np\leq x\\ (n,\ p)=1}}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\\ &= \sum_{p\leq x}\sum_{n\leq\frac{x}{p}}\frac{\ln p}{\ln\ln p}=x\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{p\ln\ln p}+O\left(\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\right)\\ &= x\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{p}\frac{1}{\ln\ln p}+O\left(\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\right). \end{aligned}\tag{1-12}$$

由Abel 恒等式我们可得

$$\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{p}\frac{1}{\ln\ln p}=\frac{\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{\ln x}{\ln^2\ln x}\right) \tag{1-13}$$

及

$$\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{\ln\ln p}\ll\frac{x}{\ln\ln x}. \tag{1-14}$$

于是结合(1-9), (1-10), (1-11), (1-12), (1-13) 及(1-14) 式我们立刻得到

$$\sum_{n\leqslant x}d_f(n)=\frac{x\ln x}{\ln\ln x}+O\left(\frac{x\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

于是完成了定理的证明.

1.5 关于F.Smarandache LCM 函数以及它的主值

对于任意的正整数n, 著名的F.Smarandache LCM 函数$SL(n)$ 定义为最小的正整数k 使得$n\mid[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$, 其中$[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$ 表示1, 2, $\cdots$, k 的最小公倍数. 例如, $SL(n)$ 的前几项值是$SL(1)=1$, $SL(2)=2$, $SL(3)=3$, $SL(4)=4$, $SL(5)=5$, $SL(6)=3$, $SL(7)=7$, $SL(8)=8$, $SL(9)=9$, $SL(10)=5$, $SL(11)=11$, $SL(12)=4$, $SL(13)=13$, $SL(14)=7$, $SL(15)=5$, $\cdots$. 关于$SL(n)$ 的性质, 一些学者已经作了研究, 并且获得了很多有趣的结果, 参阅文献[18] 和[19]. 例如, Murthy [19] 指出如果n 是一个素数, 那么$SL(n)=S(n)$, 其中$S(n)$ 表示Smarandache 函数, 等等, $S(n)=\min\{m:\ n|m!,\ m\in N\}$. 相应的, Murthy [19] 还提出了如下的问题:

$$SL(n)=S(n),\quad S(n)\neq n\ ? \tag{1-15}$$

乐茂华[6] 彻底的解决了这个问题, 并且证明了如下的结论:

每一个满足(1-15)式的正整数n 能够表示为

$$n=12\ \text{ 或 }\ n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p,$$

其中p_1, p_2, $\cdots$, p_r, p 是不同的素数, 并且α_1, α_2, $\cdots$, α_r 满足$p > p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \cdots, r$ 的正整数.

吕忠田[7] 获得了如下的渐进公式:

$$\sum_{n\leq x} SL(n) = \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right).$$

在参考文献[11] 中, 张文鹏教授让我们研究$\sum\limits_{n\leq x}\ln SL(n)$的渐进性质. 关于这个问题, 好像还没有人研究过, 至少我们没有看到与此相关的文章. 本节我们将用初等的方法来研究这个问题, 并且获得了一个非常好的结果. 那就是,我们证明了如下的:

定理1.5 对任意的实数$x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\ln SL(n) = x\ln x + O\left(x\right).$$

用证明定理1.5 的方法我们还可以证明函数$S(n)$的相似的渐近公式. 那就是, 我们有如下的:

定理1.6 对任意的实数$x > 1$,我们有

$$\sum_{n\leq x}\ln S(n) = x\ln x + O(x),$$

其中$S(n)$ 表示Smarandache 函数.

证明 为了完成定理的证明, 我们需要如下的两个引理.

引理1.5.1 对任意的正整数$n > 1$, 设$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 表示n 的因式分解式, 如果$\alpha_1 \geq 2, \alpha_2 \geq 2, \cdots \alpha_s \geq 2$, 那么我们称这样的正整数$n$ 是完全平方因子数.设$A_2(x)$ 表示所有不超过x 的完全平方因子数的整数, 那么我们有下面的渐近公式

$$A_2(x) = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\zeta(\frac{2}{3})}{\zeta(2)}x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{6}}\exp\left(-C\log^{\frac{3}{5}}x(\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\right)\right),$$

其中$C > 0$ 是一个常数.

证明 参阅参考文献[20].

引理1.5.2 设p 是一个, k 是任意的正整数. 那么对任意的正整数$x \geq 1$, 我们有如下的渐近公式

$$\sum_{\substack{pk \leq x \\ (p,\ k)=1}} \ln p = x \ln x + O\left(x\right).$$

证明 从几个不同形式的素数定理(参阅参考文献[13], [11] 和[10])我们知道

$$\sum_{k \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O\left(1\right),$$

$$\sum_{k \leq x} \ln p = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

和

$$\sum_{k \leq x} \frac{\ln p}{p^2} = D + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

其中D 是正常数.

应用这些渐近公式我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{pk \leq x \\ (p,\ k)=1}} \ln p &= \sum_{p \leq x} \ln p \sum_{\substack{k \leq \frac{x}{p} \\ (p,\ k)=1}} 1 \\
&= \sum_{p \leq x} \ln p \left(\frac{x}{p} - \frac{x}{p^2} + O\left(1\right)\right) \\
&= x \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} - x \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p^2} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p\right) \\
&= x \ln x + O\left(x\right).
\end{aligned}$$

这样便证明了引理1.5.2.

现在, 我们用这些引理去完成我们定理的证明. 设$U(n) = \sum_{n \leq x} \ln SL(n)$. 首先我们估计$U(n)$ 的上界. 事实上从F.Smarandache LCM

函数$SL(n)$ 我们知道对任意的正整数n, $SL(n)\le n$ 和$\ln SL(n)\le \ln n$, 于是我们有

$$\sum_{n\le x}\ln SL(n)\le \sum_{n\le x}\ln n.$$

从欧拉求和公式(参阅参考文献[13]) 我们很容易推导出

$$U(n)\le \sum_{n\le x}\ln n = x\ln x - x + O\left(\ln x\right) = x\ln x + O\left(x\right). \tag{1-16}$$

现在我们估计$U(n)$ 的下界. 对任意的正整数$n>1$, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 表示n 素因数分解式, 我们把区间$[1,\ n]$ 分成两个子集A and B. A 表示所有区间$[1,\ n]$ 内满足$\alpha_i\ge 2$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 的整数集合. 这就是说, A 表示区间$[1,\ n]$ 内所有的square-full数的集合; B 表示在区间$n\in[1,\ n]$ 内但$n\notin A$ 的所有整数集合. 于是我们有

$$U(n)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln SL(n)+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\ln SL(n).$$

从引理1.5.1 和集合A 的定义我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln SL(n) &\le \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln n\le \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\ln x=\ln x\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}1\\ &= \ln x\cdot A_2(x)\ll \sqrt{x}\ln x.\end{aligned}$$

现在我们估计在集合B 的求和式. 由于$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_s^{\alpha_s}\}$ (参阅参考文献[19]), 所以对任意$n\in B$, 必然存在一个素数p 使得$p|n$ 且$p^2\dagger n$. 于是, 从定义$SL(n)$ 我们有$SL(np)\ge p$.

应用这些估计式我们很容易推导出

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\ln SL(n)=\sum_{\substack{np\le x\\ (n,\ p)=1}}\ln SL(np)\ge \sum_{\substack{np\le x\\ (n,\ p)=1}}\ln p. \tag{1-17}$$

那么从引理1.5.2 和(1-17) 我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}}\ln SL(n)\ge x\ln x+O\left(x\right). \tag{1-18}$$

结合(1-16) 和(1-18) 我们可以得到如下的渐近公式

$$\sum_{n\leq x} \ln SL(n) = x \ln x + O\left(x\right).$$

这样就证明了定理1.5

用证明定理1.5 的方法我们仍然可以证明定理1.6.

1.6 Smarandache Pierced 链

如果$n \geq 1$, 那么$c(n) = 101 \times (10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \cdots + 10^{4n} + 1)$ 定义为Smarandache Pierced 链. 它的前几项值为:

$101, 1010101, 10101010101, 101010101010101, 1010101010101010101, \cdots\cdots$

我们可以看到其各项值非常漂亮而且比较特别. Smarandache [14] 提出让我们解决关于Smarandache Pierced 链的如下两个问题:

问题1: *在$\frac{c(n)}{101}$ 中有多少个素数?*

问题2: *对$n \geq 2$ 来说是否$\frac{c(n)}{101}$ 为无平方因子数?*

关于问题1, Smarandache 提到首要问题是

$$10^{4n} - 1 = (10^4 - 1)(10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \cdots + 10^{4n} + 1) = (10^4 - 1) \times \frac{c(n)}{101}$$

的两个因式. 最终Smarandache 研究了这两个因式并且证明了$\frac{c(n)}{101}$ 不是素数. 关于问题2, 好像没有人研究过, 至少我们以前没有见到过相关文章. 本文的主要目的是应用初等方法来研究这个问题, 并且得到了彻底的解决. 即就是, 我们证明了下面的:

定理1.7 *对任意实数$n \geq 2$, 序列$\frac{c(n)}{101}$ 不是无平方因子数.*

证明 首先我们给出无平方因子数的定义:

设$k \geq 2$ 为任意整数, $n > 1$ 为任意自然数. 如果对任意整数$m > 1$, 有$m^k \dagger n$, 那么我们称n 为无k 次幂因子数, 特别的当$k = 2$, 我们称n 为无平方因子数.

现在我们直接证明定理.

我们知道

$$10 \equiv 1(\text{mod}9).$$

由同余的基本性质:

如果$a \equiv b(\text{mod}m)$, 对任意的正整数n 我们有: $a^n \equiv b^n(\text{mod}m)$ (参阅参考文献[2]). 那么

$$10^{4n-4} \equiv 1(\text{mod}9),$$

$$10^{4n-8} \equiv 1(\text{mod}9),$$

$$\cdots\cdots$$

$$10^{4n} \equiv 1(\text{mod}9).$$

显然

$$1 \equiv 1(\text{mod}9),$$

于是

$$\frac{c(n)}{101} \equiv (10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \cdots + 10^{4n} + 1) \equiv 1(\text{mod}9).$$

设s, t 为任意实数, 那么我们推导出

$$\frac{c(n)}{101} = 9s + t.$$

如果对任意的实数t_1, $t = 9t_1$, 那么

$$\frac{c(n)}{101} = 9s + t = 9s + 9t_1 = 9(s + t_1) = 3^2(s + t_1)$$

从上面我们所给出的无平方因子数的定义, 我们可以得到$\frac{c(n)}{101}$ 不是无平方因子数.

这样我们便证明了定理.

1.7 Smarandache 函数的几个相关结论

在这一部分, 我们给出最近一些学者研究得到的部分关于Smarandache 函数的几个相关结论.

1.7.1 关于Smarandache 函数的一个等式

在一篇没有出版的文章中, Kenichiro Kashihara 博士提出让我们研究下面的一个等式

$$S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots\cdots+S\left(x_n^n\right)\geq nS\left(x_1\right)\cdot S\left(x_1\right)\cdots\cdots S\left(x_n\right).\quad(1\text{-}19)$$

关于这个问题, 好像从来没有人研究过, 至少我们直到现在还未见到相关文章. 本文的主要目的是应用初等方法来研究这个问题, 并且证明了如下的:

定理1.8 对任意的正整数$n>1$, 等式(1-19) 有无穷多组正整数解$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$.

定理1.9 对任意的正整数$n\geq 3$, 如果$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 满足等式(1-19), 那么x_1, x_2, $\cdots$, x_n 中至少有$n-1$个是1.

显然在定理1.8 中$n\geq 3$ 的条件是必须的. 事实上如果$n=2$, 我们可以得到$x_1=x_2=2$, 于是我们有等式

$$S(x_1^2)+S(x_2^2)=S(2^2)+S(2^2)=4+4=8=2S(2)S(2)=2S(x_1)S(x_2).$$

于是如果$n=2$, 那么定理1.8 是不正确的.

证明 在这一部分, 我们将直接证明定理.

首先我们证明定理1.8.

如果$n=1$, 那么这次, 等式(1-19) 变成了$S(x_1)\geq S(x_1)$, 并且对所有的正整数x_1都成立. 于是不失一般性我们猜想$n\geq 2$. 我们让$x_1=x_2=\cdots x_{n-1}=1$, $x_n=p>n$, 其中p 是一个素数. 注意到$S(1)=1$, $S(p)=p$ and $S(p^n)=np$, 于是我们有

$$S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots\cdots+S\left(x_n^n\right)=n-1+S(p^n)=n-1+np\quad(1\text{-}20)$$

并且

$$nS\left(x_1\right)\cdot S\left(x_1\right)\cdots\cdots S\left(x_n\right)=nS(p)=np. \tag{1-21}$$

从(1-20) 和(1-21) 我们立即推导出

$$S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots\cdots+S\left(x_n^n\right)\geq nS\left(x_1\right)\cdot S\left(x_1\right)\cdots\cdots S\left(x_n\right). \tag{1-22}$$

我们知道有无穷多个素数$p>n$, 于是我们称正整数组

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=(1,\ 1,\ \cdots,p)$$

为等式(1-20) 的解. 所以, 等式(1-19) 有无穷多组正整数解$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$.

这样便证明了定理1.8.

现在我们证明定理1.8. 假设$n\geq 3$. 如果$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 满足等式(1-19), 那么$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 中至少有$n-1$个是1. 事实上如果存在$x_1>1$, $x_2>1$, $\cdots$, $x_k>1$ 且$2\leq k\leq n$ 使得等式

$$S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots\cdots+S\left(x_n^n\right)\geq nS\left(x_1\right)\cdot S\left(x_1\right)\cdots\cdots S\left(x_n\right). \tag{1-23}$$

那么从等式和函数$S(n)$ 的性质我们有$S(x_i)>1$ 且$S\left(x_i^n\right)\leq nS(x_i)$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$. 注意到$a_1+a_2+\cdots+a_k<a_1a_2\cdots a_k$ 如果$a_i>1$ 且$k\geq 3$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$; 如果$k=2$, 那么$a_1+a_2\leq a_1a_2$, 等式成立当且仅当$a_1=a_2=2$ ($a_1>1$, $a_2>1$). 于是这次, 等式(1-23) 变成

$$n-k+S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots\cdots+S\left(x_k^n\right)\geq nS(x_1)S(x_2)\cdots S(x_k). \tag{1-24}$$

如果$k\geq 3$, 那么从(1-24) 和函数$S(n)$ 的性质我们有

$$n-k+n\left[S\left(x_1\right)+S\left(x_2\right)+\cdots\cdots+S\left(x_k\right)\right]\geq nS(x_1)S(x_2)\cdots S(x_k)$$

或者

$$\frac{n-k}{n}+S\left(x_1\right)+S\left(x_2\right)+\cdots\cdots+S\left(x_k\right)\geq S(x_1)S(x_2)\cdots S(x_k). \tag{1-25}$$

注意到$0\leq\frac{n-k}{n}<1$, 于是等式(1-25) 是不可能成立的, 由于

$$S(x_1)S(x_2)\cdots S(x_k)\geq S(x_1)+S(x_2)+\cdots+S(x_k)+1.$$

如果$k=2$, 那么等式(1-24)变成

$$n-2+S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)\geq nS(x_1)S(x_2). \tag{1-26}$$

注意到$S(x^n)\leq nS(x)$, $S(x_1)+S(x_2)\leq S(x_1)S(x_2)$ 并且等式成立当且仅当$x_1=x_2=2$, 于是如果$S(x_1)>2$ 或$S(x_2)>2$, 那么(1-26) 式是不可能成立的. 如果$S(x_1)=S(x_2)=2$, 那么$x_1=x_2=2$. 所以, 等式(1-26) 变成

$$S\left(2^n\right)\geq \frac{3n}{2}+1. \tag{1-27}$$

假设$S(2^n)=m$, 那么$m\geq 4$, 如果$n\geq 3$. 从函数$S(n)$ 的定义和性质我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m-1}{2^i}\right]<n\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{2^i}\right].$$

于是,

$$n\geq 1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m-1}{2^i}\right]>\frac{m-1}{2}+\frac{m-1}{4}=\frac{3(m-1)}{4},$$

从(1-28)式我们有

$$m=S(2^n)\geq \frac{3n}{2}+1\geq \frac{9}{8}(m-1)+1=m+\frac{m-1}{8}>m.$$

这个等式是不可能成立的. 于是如果$n\geq 3$ 并且$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 满足等式(1-19), 那么$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 中至少有$n-1$个是1.

这样便证明了定理1.9.

1.7.2 关于文章"一个新的算术函数的主值"的一些注释

对任意的正整数n, 如果对任意的正整数m 和n 且$(m,\ n)=1$, 我们有$f(mn)=\max\{f(m),\ f(n)\}$, 则称算术函数$f(n)$ 为Smarandache可乘函数. 例如, Smarandache 函数$S(n)$ 和Smarandache LCM 函数$SL(n)$ 都是Smarandache 可乘函数. 在参考文献[24]中, 我们发现一个新的Smarandache 可乘函数$f(n)$ 如下: $f(1)=1$; 如果$n>1$, 那

么$f(n)=\max\limits_{1\le i\le k}\{\frac{1}{\alpha_i+1}\}$, 其中$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为n 的标准分解式. 于是我们研究函数$f(n)$ 的主值性质, 并且证明了下面两个渐进公式:

$$\sum_{n\le x} f(n)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot \ln\ln x+\lambda\cdot x+O\left(\frac{x}{\ln x}\right), \tag{1-28}$$

其中λ 是一个可计算的常数.

$$\sum_{n\le x}\left(f(n)-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{36}\cdot\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}\cdot\sqrt{x}\cdot\ln\ln x+d\cdot\sqrt{x}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\right), \tag{1-29}$$

其中$\zeta(s)$ 是黎曼zeta-函数, 且d 为可计算的常数.

但是现在, 在参考文献[24] 中的方法和结果是错误的, 于是公式(1-28) 和(1-29) 是不正确的. 在这篇文章中, 我们将证明参考文献[24] 中的错误, 并且得到两正确的结果. 那就是, 我们证明了如下的:

定理1.10 对任意的实数$x>1$, 我们有渐进公式

$$\sum_{n\le x} f(n)=\frac{1}{2}\cdot x+O\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

定理1.11 对任意的实数$x>1$, 我们有渐进公式

$$\sum_{n\le x}\left(f(n)-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{36}\cdot\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}\cdot\sqrt{x}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\right),$$

其中$\zeta(n)$ 是黎曼$zeta$-函数.

证明 在这一部分, 我们将用初等和解析的方法来证明定理. 首先我们给出如下两个简单的引理:

引理1.7.1 假设A 表示所有平方数的集合. 于是对任意的实数$x>1$, 我们有渐进公式

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} 1=\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}\cdot x^{\frac{1}{2}}+\frac{\zeta\left(\frac{2}{3}\right)}{\zeta(2)}\cdot x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{6}}\right),$$

其中$\zeta(s)$ 是黎曼－$zeta$函数.

引理1.7.2 假设B 所有立方因子数的集合. 那么对任意的实数$x>1$, 我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} 1 = N\cdot x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{4}}\right),$$

其中N 是可计算的常数.

证明 这两个引理的证明可参阅参考文献[25].

现在我们应用两个简单引理来完成定理的证明. 事实上, 对任意的正整数$n>1$, 从函数$f(n)$ 的定义我们有

$$\sum_{n\le x} f(n) = f(1) + \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} f(n) + \sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} f(n), \tag{1-30}$$

其中A 表示所有的完全因子数的集合. 那就是说, $n>1$, 且对任意的素数p, 如果$p\mid n$, 那么$p^2\mid n$. B 表示在$n\notin A$ 中所有正整数$n>1$ 的集合. 注意到$f(n)\ll 1$, 从A 的定义和引理1.7.1 我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} f(n) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1-31}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} f(n) &= \sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} \frac{1}{2} = \sum_{n\le x}\frac{1}{2} - \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{1-32}$$

现在结合(1-30), (1-31) 和(1-32) 我们立即得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} f(n) &= 1 + \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} f(n) + \sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} f(n)\\ &= \frac{1}{2}\cdot x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

这样便证明了定理1.10

现在我们证明定理1.11

从$f(n)$ 的定义和完全平方因子数的定义我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\left(f(n)-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\left(f(n)-\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n\notin A}}\left(f(n)-\frac{1}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\left(f(n)-\frac{1}{2}\right)^2. \qquad (1\text{-}33)\end{aligned}$$

其中A 所有完全平方因子数的集合. 假设C 表示所有完全立方因子数的集合. 那么从完全平房因子数的性质, 引理1.7.1 和引理1.7.2 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\left(f(n)-\frac{1}{2}\right)^2 &= \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A,\ f(n)=\frac{1}{3}}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}\left(f(n)-\frac{1}{2}\right)^2\\ &= \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2-\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+O\left(\sum_{\substack{n\le x\\ n\in C}}1\right)\\ &= \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}\cdot x^{\frac{1}{2}}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\right). \qquad (1\text{-}34)\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$ 是黎曼－zeta函数.

现在结合(1-33) 和(1-34) 我们有渐进公式

$$\sum_{n\le x}\left(f(n)-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)}\cdot x^{\frac{1}{2}}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\right).$$

这样便完成了定理1.11 的证明.

1.7.3 Smarandache 函数的一个推广

对任意的正整数n, 著名的Smarandache 函数$S(n)$ 定义为最小的正整数m 使得$n \mid m!$. 在参考文献[26] 中, Jozsef Sandor 介绍了另外一个算数函数$P(n)$ 如下: $P(n)=\min\{p:\ n\ |p!\}$, 其中p 是一个素数. 也就是说,

$P(n)$ 表示最小的素数p 使得$n \mid p!$. 事实上函数$P(n)$ 即就是Smarandache 函数$S(n)$ 的一个推广. 它的前几项值为: $P(1)=2$, $P(2)=2$, $P(3)=3$, $P(4)=5$, $P(5)=5$, $P(6)=3$, $P(7)=7$, $P(8)=5$, $P(9)=7$, $P(10)=5$, $P(11)=11$, $\cdots$. 我们很容易能够证明对每一个素数p 都有$P(p)=p$, 并且如果n 为无平方因子数, 那么$P(n)=$ 是能够整除n 的最大素数. 如果p 为素数, 那么下面的两个等式是成立的:

$$2p+1 \le P(p^2) \le 3p-1.$$

对任意的正整数n, 我们有(参阅参考文献[26] 中的结论4)

$$S(n) \le P(n) \le 2S(n)-1. \tag{1-35}$$

本文的主要目的是应用初等和解析的方法来研究函数$P(n)$ 的主值性质, 并且给出两个有趣的主值公式. 也就是, 我们证明了如下的结论:

定理1.12 对任意的实数$x>1$, 我们有渐进公式

$$\sum_{n\le x} P(n) = \frac{1}{2}\cdot x^2 + O\left(x^{\frac{19}{12}}\right).$$

定理1.13 对任意实数$x>1$, 我们有主值公式

$$\sum_{n\le x}\left(P(n)-\overline{P}(n)\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$\overline{P}(n)$ 表示n 的最大素因数, $\zeta(s)$ 为黎曼*zeta*-函数.

证明 在这一部分, 我们直接证明这两个定理.

首先我们证明定理1.12 对任意实数$x>1$, 我们把区间$[1,\ x]$ 内的所有实数分为两个集合A 和B, 其中A 表示: 存在一个素数p 使得$p|n$ 且$p>\sqrt{n}$ 的所有$n\in[1,\ x]$ 内的整数构成的集合. B 表示在这个区间内所有$n\notin A$ 的整数构成的集合. 从函数$P(n)$ 的定义和性质我们有

$$\sum_{n\in A} P(n) = \sum_{\substack{n\le x\\ p|n,\ \sqrt{n}<p}} P(n) = \sum_{\substack{pn\le x\\ n<p}} P(pn) = \sum_{\substack{pn\le x\\ n<p}} p$$

$$= \sum_{n\leq\sqrt{x}} \sum_{n<p\leq\frac{x}{n}} p. \tag{1-36}$$

由Able 求和公式(参阅定理4.2 中的[7]) 式和素数定理:

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中a_i $(i = 1,\ 2, \cdots, k)$ 是常数且$a_1 = 1$.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n<p\leq\frac{x}{n}} p &= \frac{x}{n} \cdot \pi\left(\frac{x}{n}\right) - n \cdot \pi(n) - \int_{n}^{\frac{x}{n}} \pi(y)dy \\ &= \frac{x^2}{2n^2 \ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i \cdot x^2 \cdot \ln^i n}{n^2 \cdot \ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{n^2 \cdot \ln^{k+1} x}\right), \qquad (1\text{-}37)\end{aligned}$$

其中我们应用估计式$n \leq \sqrt{x}$, 且b_i 是可计算的常数.

注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^i n}{n^2}$ 对所有的$i = 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ 是收敛的. 由(1-37) 和(1-38) 式我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A} P(n) &= \sum_{n\leq\sqrt{x}} \left(\frac{x^2}{2n^2 \ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i \cdot x^2 \cdot \ln^i n}{n^2 \cdot \ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{n^2 \cdot \ln^{k+1} x}\right)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right), \qquad (1\text{-}38)\end{aligned}$$

其中c_i $(i = 2,\ 3, \cdots, k)$ 为常数.

现在我们估计集合B 中的和. 注意到对所有的素数p 和正整数α, $S(p^\alpha) \leq \alpha \cdot p$, 则由(1-36) 我们有

$$\sum_{n\in B} P(n) = \sum_{n\in B} (2S(n) - 1) \leq \sum_{n\leq x} \sqrt{n} \cdot \ln n \ll x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x. \tag{1-39}$$

结合(1-39) 式和(1-40) 式我们可得到渐近公式

$$\sum_{n\leq x} P(n) = \sum_{n\in A} P(n) + \sum_{n\in B} P(n) = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中c_i $(i=2,\ 3,\cdots,k)$ 为常数.

这样我们便证明了定理1.12.

现在我们证明定理1.13.

对任意的正整数$n>1$, 设$\overline{P}(n)$ 表示能整数n 的最大素数. 我们把区间$[1,\ x]$ 内的所有整数分为三个集合A, C 和D, 其中A 表示存在一个素数p 使得$p>\sqrt{n}$ 的所有$n\in[1,\ x]$ 的整数构成的集合; C 表示区间$[1,\ x]$ 内满足$n_1\le p\le\sqrt{n}$ 的所有整数$n=n_1p^2$ 构成的集合, 其中p 为素数; D 表示所有满足$n\notin A$ 且$n\notin C$ 的整数$n\in[1,\ x]$ 构成的集合. 很显然如果$n\in A$, 那么$P(n)=\overline{P}(n)$ 且$\left(P(n)-\overline{P}(n)\right)^2=0$. 于是我们有等式

$$\sum_{n\in A}\left(P(n)-\overline{P}(n)\right)^2=0. \tag{1-40}$$

如果$n\in C$, 那么$P(n)=P(p^2)\ge 2p+1$. 另一方面, 对所有足够大的实数x, 从M.N.Huxley [9] 在区间$\left[x,\ x+x^{\frac{7}{12}}\right]$ 内至少存在一个素数. 所以我们有估计式

$$2p+1\le P(p^2)\le 2p+O\left(p^{\frac{7}{12}}\right). \tag{1-41}$$

由[1-38] 式我们可得渐近公式

$$\sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\le\sqrt{\frac{x}{n}}}p^2=\frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right). \tag{1-42}$$

注意到$\overline{P}(n)=p$, 如果$n=n_1\cdot p^2\in C$.

因此, 从(1-41) 式和(1-42) 式我们有估计式

$$\begin{aligned}\sum_{n\in C}\left(P(n)-\overline{P}(n)\right)^2 &= \sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\le\sqrt{\frac{x}{p}}}\left(P(np^2)-\overline{P}(np^2)\right)^2\\ &= \sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\le\sqrt{\frac{x}{n}}}\left(P(p^2)-p\right)^2=\sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\le\sqrt{\frac{x}{n}}}\left(p^2+O\left(p^{\frac{19}{12}}\right)\right)\\ &= \sum_{n\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{n<p\le\sqrt{\frac{x}{n}}}p^2+O\left(x^{\frac{31}{24}}\right)\\ &= \frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),\end{aligned} \tag{1-43}$$

其中$\zeta(s)$ 为黎曼zeta-函数.

如果$n \in D$ 且$\big(P(n)-\overline{P}(n)\big)^2 \neq 0$, 那么$P(p^\alpha) \ll S(p^\alpha) \ll p\cdot\ln p$, $\overline{P}(p^3) \ll p\cdot\ln p$, 因此我们可得第三个估计式

$$\sum_{n\in D}\big(P(n)-\overline{P}(n)\big)^2 \ll \sum_{3\leq\alpha\leq\ln x}\sum_{np^\alpha\leq x} p^{\frac{2}{3}} \ll x\cdot\ln x. \tag{1-44}$$

结合(1-40) 式, (1-43) 式和(1-44) 式我们立即的渐进公式

$$\sum_{n\leq x}\big(P(n)-\overline{P}(n)\big)^2 = \frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$\overline{P}(n)$ 能整除n 的最大素因数, $\zeta(s)$ 为黎曼zeta-函数.

这样我们便证明了定理1.13.

1.7.4 关于F.Smarandache函数及其k次补数

在参考文献[5] 中徐哲峰获得了有关$S(n)$ 的一个深刻结果！也就是证明了渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(S(n)-P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$P(n)$ 表示n 的最大素因子, $\zeta(s)$ 表示Riemann zeta-函数.

本文作为文献[5] 的注释, 我们获得了一个类似的结果. 为叙述方便, 我们先引入k 次补数的定义：

定义1.2 *设$k\geq 2$ 为任意给定的整数, 则n 的k 次补数$a_k(n)$ 定义为最小的正整数m 使得乘积$m\cdot n$ 为完全k 次方幂.*

这个函数也是F.Smarandache 教授引入的, 并建议人们研究它的各种性质! 有关这一函数的研究工作也不少, 可参阅文献[29], [8]13 及[30]. 本文借助于文献[5] 的思想主要研究了复合函数$S(a_k(n))$ 的值分布问题, 证明了下面的：

定理1.14 *设$k\geq 2$ 是一个给定的整数. 那么对任意实数$x\geq 3$, 我们有渐近公式*

$$\sum_{n\leq x}\left(S\left(a_k(n)\right)-(k-1)P(n)\right)^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{k^2x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right),$$

其中$\zeta(s)$ 表示*Riemann zeta*-函数.

定理1.15 对任意实数$x \geq 3$, 我们也有

$$\sum_{n \leq x} \left(SM\left(a_k(n)\right) - (k-1)P(n)\right)^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2})}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{k^2 x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right),$$

其中函数$SM(n)$ 定义为$SM(1)=1$, 当$n>1$ 且$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 为n 的标准分解式时定义$SM(n) = \max\limits_{1 \leq i \leq r} \{\alpha_i p_i\}$.

几个引理 为了完成定理的证明, 我们需要下面几个简单引理, 首先有:

引理1.7.3 设$k \geq 2$ 是一个给定的整数. 那么对任意充分大的正整数n, 我们有

(i) 如果$P(n) > \sqrt{n}$, 那么$S\left(a_k(n)\right) = SM\left(a_k(n)\right) = (k-1)P(n)$;

(ii) 如果$n = mp_1P(n)$ 且$n^{\frac{1}{3}} < p_1 < P(n) \leq \sqrt{n}$, 那么

$$S\left(a_k(n)\right) = SM\left(a_k(n)\right) = (k-1)P(n);$$

(iii) 如果$n = mP^2(n)$ 且$n^{\frac{1}{3}} < P(n) \leq \sqrt{n}$, 那么当$k>2$ 时有

$$S\left(a_k(n)\right) = SM\left(a_k(n)\right) = (k-2)P(n);$$

当$k=2$ 时,

$$S\left(a_k(n)\right) = SM\left(a_k(n)\right) \leq kn^{\frac{1}{3}}.$$

证明 我们只证明对$S(a_k(n))$ 的结论. 类似的, 可以推出所有结果适用于$SM(a_k(n))$. 现在我们证明(i). 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示n 的标准分解式, 由于$P(n) > \sqrt{n}$, 所以$P(n) = p_r$, $\alpha_r = 1$. 因此$S(a_k(P(n))) = S\left(P^{k-1}(n)\right) = (k-1)P(n)$. 而$S\left(a_k(p_i^{\alpha_i})\right) \leq S\left(p_i^{k-1}\right) \leq (k-1)p_i \leq (k-1)P(n)$, $i = 1, 2, \cdots, r$. 所以$S\left(a_k(n)\right) = (k-1)P(n)$.

即就是证明了引理1.7.3 的(i)式.

现在证明引理1的(ii) 式. 事实上由于m 的任意素因子p 都满足$p < n^{\frac{1}{3}}$. 而当$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 为n 的标准分解式时, 显然$a_k(n) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$ 满足$\beta_i \leq k-1$, $i = 1, 2, \cdots, r$. 于是由$n^{\frac{1}{3}} < p_1 < P(n) \leq \sqrt{n}$ 我们立刻推出$S\left(a_k(n)\right) = (k-1)P(n)$. 即为引理1 的(ii) 式.

当$n=mP^2(n)$ 且$n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leq\sqrt{n}$ 时, 由于这时$m<P(n)$，所以当$k>2$ 时, $S\left(a_k(P^2(n))\right)=S\left(P^{k-2}(n)\right)=(k-2)P(n)$, 从而$S\left(a_k(n)\right)=(k-2)P(n)$.

当$k=2$ 时, 显然$a_k(P^2(n))=1$, m 的其它素因子不大于$n^{\frac{1}{3}}$. 因此$S\left(a_k(n)\right)\leq S\left(P^{k-1}(m)\right)\leq kn^{\frac{1}{3}}$.

于是完成了引理1.7.3的证明.

引理1.7.4. 设$k\geq 2$ 为给定的整数. 那么对任意实数$x\geq 3$, 我们有估计式

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}}\left(S\left(a_k(n)\right)-(k-1)P(n)\right)^2\ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}$$

及

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}}\left(SM\left(a_k(n)\right)-(k-1)P(n)\right)^2\ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}.$$

证明 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 为n 的标准分解式. $a_k(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$. 则$S\left(a_k(n)\right)=\max\limits_{1\leq i\leq r}\{S(p_i^{\beta_i})\}$. 令$\beta p=\max\limits_{1\leq i\leq r}\{\beta_i p_i\}$, 于是有$S\left(a_k(n)\right)\leq\beta p\leq kp$. 注意当$P(n)$ 在n 的标准分解式中的方幂为1 时, $\beta=k-1$, 此时有$S\left(a_k(n)\right)-(k-1)P(n)=0$, 所以我们有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\ll\sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq n^{\frac{1}{3}},\ P^2(n)|n}}k^2P^2(n)$$

$$\ll\sum_{\substack{np^2\leq x\\ p\leq x^{\frac{1}{3}}}}k^2p^2\ll\sum_{p\leq x^{\frac{1}{3}}}p^2\sum_{n\leq\frac{x}{p^2}}k^2\ll k^2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}.$$

同理可推出另一个估计式.

于是完成了引理1.7.4 的证明.

引理1.7.5 设p为素数, m 为正整数. 则我们有估计式

$$\sum_{m\leq p\leq\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}(\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}})}\right).$$

.

证明 参阅文献[5] 中引理1 的证明.

定理的证明 这节我们完成定理的证明. 显然我们只需要证明定理1.14. 类似的不难推出定理1.15 由引理1.7.3 知当$P(n) > \sqrt{n}$ 时, $S(a_k(n)) = SM(a_k(n)) = (k-1)P(n)$. 因此结合引理1.7.3 及引理1.7.4 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\le x}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)>\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le n^{\frac{1}{3}}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2+\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2+O\left(\frac{k^2x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right). \qquad (1\text{-}45)
\end{aligned}$$

注意当n 满足$n^{\frac{1}{3}} < P(n) \le \sqrt{n}$ 时, 我们可分为以下三种情况:

(a) $n = m \cdot P^2(n)$ 且$m < P(n)$.
(b) $n = m \cdot p_1 \cdot P(n)$ 且$m < n^{\frac{1}{3}} < p_1 < P(n)$.
(c) $n = m \cdot P(n)$ 且$P(m) \le n^{\frac{1}{3}}$.

对于情形(b) 和(c) 中的n, 显然这些n 满足$S(a_k(n)) = (k-1)P(n)$, 于是这种n 在(1-46) 式中产生的和式为0. 而对于情形(a) 中的n, 当$k > 2$ 时有$S(a_k(n)) = (k-2)P(n)$. 于是由(1) 式我们有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac{1}{3}}<P(n)\le\sqrt{n}}}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac13}<p\le\sqrt{mp^2}}} \left(S(p^{k-2})-(k-1)p)\right)^2\\
&= \sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac13}<p\le\sqrt{mp^2}}} p^2\\
&= \sum_{m<x^{\frac13}}\ \sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}} p^2. \qquad (1\text{-}46)
\end{aligned}
$$

而对于情形(a) 中的n, 当$k=2$ 时有$S(a_k(n))\le k^2P(m)\le k^2\cdot n^{\frac13}$, 此时仍然有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac13}<P(n)\le\sqrt{n}}} \left(S(a_2(n))-P(n)\right)^2\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac13}<p\le\sqrt{mp^2}}} \left(S^2(a_2(n))-2pS(a_2(n))+p^2\right)\\
=&\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac13}<p\le\sqrt{mp^2}}} p^2+O\left(\sum_{\substack{mp^2\le x\\ (mp^2)^{\frac13}<p\le\sqrt{mp^2}}}\left((mp^2)^{\frac23}+(mp^2)^{\frac13}p\right)\right)\\
=&\sum_{m<x^{\frac13}}\ \sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}} p^2+O\left(x^{\frac43}\right). \qquad (1\text{-}47)
\end{aligned}
$$

结合(1-46), (1-47) 式及引理1.7.5 并注意$x^{\frac43}\ll\frac{x^{\frac32}}{\ln^2 x}$ 知当$k\ge 2$ 时我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\le x\\ n^{\frac13}<P(n)\le\sqrt{n}}} \left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2\\
=&\sum_{m\le x^{\frac13}}\ \sum_{m^2<p^2\le\frac{x}{m}} p^2+O\left(x^{\frac43}\right)=\sum_{m\le x^{\frac13}}\left(\frac{2x^{\frac32}}{3m^{\frac32}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac32}}{m^{\frac32}(\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}})}\right)\right)\\
=&\frac{2x^{\frac32}}{3\ln x}\sum_{m\le e^{\sqrt{\ln x}}}\frac{1}{m^{\frac32}}+O\left(\sum_{e^{\sqrt{\ln x}}\le m\le x^{\frac13}}\frac{x^{\frac32}}{m^{\frac32}\ln x}\right)+O\left(\frac{x^{\frac32}}{\ln^2 x}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right). \tag{1-48}$$

由(1-45) 及(48) 式我们立刻得到渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\left(S(a_k(n))-(k-1)P(n)\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{k^2x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right).$$

于是完成了定理的证明.

1.7.5 关于F.Smarandache函数的奇偶性

我们令$OS(n)$ 表示区间[1, n] 中$S(n)$ 为奇数的正整数n 的个数；$ES(n)$ 表示区间[1, n] 中$S(n)$ 为偶数的正整数n 的个数. 在文献[14]中，Kenichiro Kashihara 提出了下面的问题：

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{ES(n)}{OS(n)}$$

是否存在? 如果存在, 确定其极限.

关于这一问题, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有看到过有关方面的论文. 本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决！具体地说也就是证明了下面的:

定理1.16 对任意正整数$n>1$, 我们有估计式

$$\frac{ES(n)}{OS(n)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

显然这是一个比解决[14] 中问题更强的结论. 由此定理我们立刻得到下面的:

推论 对任意正整数n, 我们有极限

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{ES(n)}{OS(n)}=0.$$

定理的证明 这节我们利用初等方法给出定理的直接证明. 首先我们估计$ES(n)$ 的上界. 事实上当$n>1$ 时, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示n 的标准分解式, 那么由函数$S(n)$ 的定义及性质可设$S(n)=S\left(p_i^{\alpha_i}\right)=m\cdot p_i$. 若$m=1$, 那么$S(n)=p_i$ 为奇数, 除非$n=2$. 令$M=\ln n$, 于是我们有

$$\begin{aligned} ES(n)=\sum_{\substack{k\le n\\ 2|S(k)}}1 &\le 1+\sum_{\substack{k\le n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\ge 2}}1\\ &\le 1+\sum_{S(k)\le M}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 2}}1. \end{aligned} \tag{1-49}$$

现在我们分别估计(1-49)式中的各项, 显然有

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 2}}1\le\sum_{\substack{kp^2\le n\\ 2p>M}}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}}1\le\sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}}\sum_{k\le\frac{n}{p^2}}1+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}}\sum_{k\le\frac{n}{p^\alpha}}1\\ \ll&\sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}}\frac{n}{p^2}+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}}\frac{n}{p^\alpha}\ll\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge p}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ 3\le\alpha<p}}\frac{n}{p^\alpha}\\ \ll&\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha>\sqrt{M}}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ p>\sqrt{M},\ \alpha\ge 3}}\frac{n}{p^\alpha}\\ \ll&\frac{n}{\ln n}+\frac{n}{2^{\sqrt{M}-1}}+\frac{n}{M}\ll\frac{n}{\ln n}. \end{aligned} \tag{1-50}$$

对于(1-49)式中的另一项, 我们需要采取新的估计方法. 对任意素数$p\le M$, 令$\alpha(p)=\left[\frac{M}{p-1}\right]$, 即就是$\alpha(p)$ 表示不超过$\frac{M}{p-1}$ 的最大整数. 设$u=\prod\limits_{p\le M}p^{\alpha(p)}$. 对任意满足$S(k)\le M$ 的正整数k, 设$S(k)=S(p^\alpha)$, 则由$S(k)$ 的定义一定有$p^\alpha|M!$, 从而, $\alpha\le\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[\frac{M}{p^j}\right]\le\frac{M}{p-1}$. 所以所有满足$S(k)\le M$ 的正整数k 一定整除u，所有这样k 的个数不会超过u 的正因数的个数, 即就是$d(u)$. 所以我们有

$$\sum_{S(k)\le M}1\ \le\ \sum_{d|u}1=\prod_{p\le M}(1+\alpha(p))=\prod_{p\le M}\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\right), \tag{1-51}$$

其中$\exp(y)=e^y$.

由素数定理的两种形式(参阅文献[13] 及[11]) $\pi(M)=\sum\limits_{p\le M}1=\frac{M}{\ln M}+O\left(\frac{M}{\ln^2 M}\right)$及$\sum\limits_{p\le M}\ln p=M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)$ 可得:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\le\sum_{p\le M}\ln\left(1+\frac{M}{p-1}\right)\\
=&\sum_{p\le M}\left[\ln(p-1+M)-\ln p-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\\
\le&\ \pi(M)\cdot\ln(2M)-\sum_{p\le M}\ln p+\sum_{p\le M}\frac{1}{p}\\
=&\ \frac{M\cdot\ln(2M)}{\ln M}-M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)=O\left(\frac{M}{\ln M}\right).
\end{aligned} \tag{1-52}$$

注意到$M=\ln n$, 由(1-51) 及(1-52)式立刻得到估计式:

$$\sum_{S(k)\le M}1\ll\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right), \tag{1-53}$$

其中c 为一正常数.

注意到$\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right)\ll\frac{n}{\ln n}$, 于是结合(1-49), (1-50)及(1-53) 式立刻推出估计式:

$$ES(n)=\sum_{\substack{k\le n\\ 2|S(k)}}1=O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

显然$OS(n)+ES(n)=n$, 所以由上式可得:

$$OS(n)=n-ES(n)=n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

从而

$$\frac{ES(n)}{OS(n)}=\frac{O\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)}=O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

于是完成了定理1.16的证明.

第二章　伪Smarandache 函数

2.1　伪Smarandache 函数的定义及性质

伪Smarandache函数的定义是这样给定的:

定义2.1　对任意正整数$n > 1$, 伪Smarandache函数$Z(n)$定义为最小的正整数m 使得$[1+2+3+\cdots+m]$ 能够被n 整除. 也就是, $Z(n) = min\left\{m : m \in N : n \mid \frac{m(m+1)}{2}\right\}$.

关于伪Smarandache函数, 国内外学者作了不少的研究, 也得到了很多相关性质, 我们列举如下:

性质2.1　对任意正整数n, 我们有伪Smarandache函数$Z(n) \geq 1$.

证明: 这个结论可以由定义直接得到.
注意到: 当且仅当$n = 1$时, 有$Z(n) = 1$.

性质2.2　对任意正整数n, $Z(n) < n$ 不恒成立.

证明: 例如:$Z(2) = 3$, $Z(4) = 7$, $Z(8) = 15$.

性质2.3　对任意素数$p \geq 3$, $Z(p) = p - 1$.

证明: 令$Z(p) = m$, 其中m是某个正整数. 由于$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$, 根据定义可知$m$是满足

$$p \mid \frac{m(m+1)}{2}$$

的最小正整数.

显然, p一定整除m或者$m+1$, 满足该条件的最小的数是$p = m+1$或者$p - 1 = m$, 且$p \neq 2$. 否则, 若$p = 2$, 则有$Z(2) = 3$.

性质2.4　对任意素数$p \geq 3$及$k \in N$, 我们有$Z(p^k) = p^k - 1$. 当$p = 2$时, 则有$Z(2^k) = 2^{k+1} - 1$.

证明: 令$Z(p^k)=m$, 其中m是某个正整数. 由于$\sum\limits_{k=1}^{m} k=\frac{m(m+1)}{2}$, 根据定义可知$m$是满足

$$p^k|\frac{m(m+1)}{2}$$

的最小正整数.

显然, p^k一定整除m或者$m+1$, 满足该条件的最小的数是$p^k=m+1$或者$p^k-1=m$, 且$p\neq 2$. 否则, 若$p=2$, 则有$Z(2)=3$.

性质2.5 对任意合数n, 我们有$Z(n)=\max\{Z(m),\quad m|n\}$.

证明: 假设n是合数, 此时结论即为:

$$Z(n)\geq \max\{Z(m),\quad m|n\}.$$

令$Z(n)=p$, $Z(m)=q$, 其中$m|n$. 设$q>p$, 于是有

$$n|\frac{p(p+1)}{2},\quad m|\frac{q(q+1)}{2}.$$

性质2.6 (1) $Z(n)$是不可加的, 即$Z(m+n)$不恒等于$Z(n)+Z(m)$.
(2) $Z(n)$是不可乘的, 即$Z(m\cdot n)$不恒等于$Z(n)\cdot Z(m)$.

证明: 例如:

$$Z(2+3)=Z(5)=4\neq 5=Z(3)+Z(2),$$

$$Z(2\cdot 3)=Z(6)=3\neq 2\cdot 3=Z(2)\cdot Z(3).$$

性质2.7 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{Z(k)}$发散.

证明: 事实上, 根据函数$Z(n)$ 的定义我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{Z(k)}>\sum_{p=3}^{n}\frac{1}{Z(p)}=\sum_{3\leq p\leq n}\frac{1}{p-1}>\sum_{3\leq p\leq n}\frac{1}{p}.$$

众所周知, $\sum\limits_{p}\frac{1}{p}$是发散的. 因此, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{Z(k)}$也是发散的.

性质2.8 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{Z(k)}{k}$发散.

证明: 事实上, 根据函数$Z(n)$的定义我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Z(k)}{k}>\sum_{p=3}^{n}\frac{Z(p)}{p}=\sum_{3\le p\le n}\frac{p-1}{p}>\sum_{3\le p\le n}\frac{1}{p}.$$

由于$\sum\limits_{3\le p\le n}\frac{1}{p}$是发散的. 因此, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{Z(k)}{k}$也是发散的.

性质2.9 对任意$m\ge 1$, 存在某个$n\ge 1$, 使得$Z(n)=m$.

2.2 关于伪Smarandache函数的几个定理

在参考文献[14] 和[44] 中, Kenichiro Kashihara 和David Gorski 研究了函数$Z(n)$ 的初等性质, 并且证明了一些有趣的结果. 我们列举其中的几个:

对任意的素数$p\ge 3$, $Z(p)=p-1$;

对任意的素数$p\ge 3$ 和任意的$k\in N, Z(p^k)=p^k-1$;

对任意的$k\in N, Z(2^k)=2^{k+1}-1$;

对任意整数$k>0$, 如果n 不能表示为2^k 的形式, 那么$Z(n)<n$.

令一方面, Kenichiro Kashihara [14] and M.L.Perez [23] 关于函数$Z(n)$ 的一些相关问题, 其中两个如下:

(A) 证明$Z(n)=Z(n+1)$ 没有正整数解.

(B) 证明对任意给定的正整数r, 存在一个整数s 使得$Z(s)-Z(s+1)$ 的绝对值比r 大.

对问题(A), Kenichiro Kashihara 提到我暂时还不能解决它, 但是我猜这个问题一定是正确的. 我检验了$1\le n\le 60$ 内的所有值. 对问题(B), Kenichiro Kashihara 建议: 虽然我没能解决它, 但我坚信它是正确的. $Z(s)-Z(s+1)$ 的最小绝对值是1, 由$Z(2)-Z(3)=3-2=1$ 可得; 当$1\le x\le 60$ 时可以找到最大值为52, 即$Z(32)-Z(33)=63-11=52$.

下面, 我们用初等方法来研究这两个问题, 并且得到了彻底的解决.

首先我们用初等方法来证明下面的结论.

定理2.1 等式$Z(n)=Z(n+1)$ 无解.

证明 对任意实数m, 设$Z(n)=Z(n+1)=m$, 从函数$Z(n)$ 的定义, 我们即可得到

$$n \mid \frac{m(m+1)}{2}, \quad n+1 \mid \frac{m(m+1)}{2},$$

于是

$$\frac{n(n+1)}{2} \mid \frac{m(m+1)}{2},$$

那么

$$n < m. \tag{2-1}$$

因为

$$m = Z(n) \le n-1 \le n, \quad m = Z(n+1) \le n-1 \le n,$$

所以我们有

$$m \le n. \tag{2-2}$$

.

结合(1) 和(2) 我们便证明了定理2.1.

定理2.2 对任意给定的正数r 一定存在一个整数s 使得$Z(s)-Z(s+1)$ 的绝对值比r 大.

证明 对任意$\alpha \in N$, 设$s=2^\alpha$, 那么我们有

$$Z(s)=Z(2^\alpha)=2^{\alpha+1}-1,$$

$$Z(s+1)<s=2^\alpha.$$

于是

$$|Z(s)-Z(s+1)\,| > (2^{\alpha+1}-1)-2^\alpha = 2^\alpha-1.$$

设

$$2^\alpha - 1 > r,$$

那么

$$|Z(s)-Z(s+1)\,| > r$$

则

$$\alpha > \log_2^{(r+1)}.$$

所以存在一个整数$s = 2^\alpha = r + 1$ 使得$Z(s) - Z(s + 1)$ 的绝对值比r 大
这样我们便证明了定理2.2.

定理2.3 对任意实数$x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x} Z(S(n)) = \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right).$$

证明 设$P(n)$ 为n 的最大素数因子. 我们把所有的整数分为两个子集A and B. 其中

$$A = \{n|n \le x, P(n) \le \sqrt{n}\},\quad B = \{n|n \le x, P(n) > \sqrt{n}\}.$$

那么我们有

$$\sum_{n\le x} Z(S(n)) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} Z(S(n)) + \sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} Z(S(n)) \tag{2-3}$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} Z(S(n)) \le \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} Z(\sqrt{n}) \ll \sum_{n\le x}\sqrt{n}\ln n \ll x^{\frac{3}{2}}\ln x \tag{2-4}$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} Z(S(n)) = \sum_{\substack{n\le x\\ P(n)>\sqrt{n}}} Z(P(n)) = \sum_{n\le x}\sum_{n\le p\le \frac{x}{n}} p-1 = \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right) \tag{2-5}$$

结合(3), (4), (5)定理2.3就得到了证明.

2.3 关于伪Smarandache 函数的几个方程

本部分给出近期国内学者研究的关于伪Smarandache函数的一些方程

2.3.1 一个与Smarandache函数有关的函数方程及其正整数解

本文的主要目的是研究函数方程

$$Z(n) + S_*(n) = n \tag{2-6}$$

的可解性, 并利用初等及组合方法获得了这一方程的所有正整数解. 具体地说也就是证明了下面的:

定理2.4 方程(1) 有且仅有一个偶数解$n = 6$; 奇数n 满足方程(1) 当且仅当n 为奇素数p 的方幂. 即就是 $n = p^k$, 其中$p \geq 3$ 为素数, k 为任意正整数.

证明 这节我们利用初等及组合方法来完成定理的证明. 为表达清楚起见, 首先我们给出下面这样一个结论:

引理2.3.1 *对任意正整数n, $Z(n) = n - 1$当且仅当n为奇素数p的方幂, 即就是$n = p^\alpha$, p为奇素数, α为正整数.*

证明 事实上当$Z(n) = n - 1$ 时, 由$Z(n)$ 的定义知n 整除$\frac{n(n-1)}{2}$, 而$(n,\ n-1) = 1$, 所以n 必为大于1 的奇数. 显然n 不可能含有两个不同的素因子. 否则假定$n = u \cdot v$, $(u,\ v) = 1$且$u > v > 1$. 令$k = u \cdot (v - \overline{u})$, 其中$\overline{u}$ 是满足同余方程 $x \cdot u \equiv 1(\mod v)$ 的最小正整数解, 即就是$1 \leq \overline{u} \leq v - 1$. 此时我们立刻推出

$$n = u \cdot v \ \text{ 整除 } \frac{(k-1) \cdot k}{2} = \frac{u \cdot (v - \overline{u}) \cdot (u \cdot (v - \overline{u}) + 1)}{2}.$$

由$Z(n)$ 的定义显然有$Z(n) \leq k = u \cdot (v - \overline{u}) < n - 1$, 这与$Z(n) = n - 1$ 矛盾. 所以n 不可能有两个不同的素因子, 因此n 只能有一个素因子, 也就是n 必为奇素数p 的方幂.

现在我们利用这个引理来完成定理的证明. 为简单起见我们设$S_*(n) = m$. 显然$n = 1$ 不满足方程(1). 于是假定$n > 1$ 且满足方程(1). 由伪Smarandache函数$Z(n)$ 的定义知

$$Z(n) \cdot (Z(n) + 1) + m \cdot (Z(n) + 1) = n \cdot (Z(n) + 1).$$

由此式及$Z(n)$ 的定义我们立刻推出n 整除$m \cdot (Z(n) + 1)$, 注意到$m!$ 整除n, 所以我们可设

$$m \cdot (Z(n)+1) = kn \ \text{ 或者 } \ Z(n) = \frac{kn}{m} - 1.$$

将此式代入方程(1)可得

$$\frac{kn}{m} - 1 + m = n. \tag{2-7}$$

由此及$S_*(n) = m$ 的定义立刻得到$(m-1)!$ 整除$m-1$ 以及n 整除$m(m-1)$. 显然$(m-1)!$ 整除$m-1$ 当且仅当$m = 1, 2$ 或者3. 当$m = 1$ 时, 由(2)式知$k = 1$, 此时$Z(n) = n-1$. 有前面的引理知$Z(n) = n-1$ 当且仅当n 为奇素数p 的方幂, 即就是$n = p^\alpha$, p 为奇素数, α 为正整数. 经验证知所有奇素数p的方幂p^α都是方程(1)的解. 当$m = 2$ 时, 此时由于$n > 1$ 且n 整除$m(m-1)$, 所以$n = 2$, 但是$n = 2$ 不是方程(1)的解. 当$m = 3$ 时, $m(m-1) = 6$, 这时结合n 整除$m(m-1) = 6$ 以及$m! = 6$ 整除n 我们立刻推出$n = 6$. 经检验知$n = 6$ 是方程(1) 的一个解.

综合以上分析, 我们立刻得到方程(1)有且只有一个偶数解$n = 6$; 所有奇数n 满足方程(1) 当且仅当n 为奇素数p 的方幂.

于是完成了定理的证明.

2.3.2 一个包含伪Smarandache函数及其对偶函数的方程

对于任意正整数n, 著名的伪F.Smarandache 函数$Z(n)$ 定义为最小的正整数m 使得n 整除$\frac{m(m+1)}{2}$. 即就是$Z(n) = \min\{m:\ m \in N,\ n \mid \frac{m(m+1)}{2}\}$. 从$Z(n)$ 的定义我们不难推出$Z(n)$ 的前几个值为: $Z(1) = 1$, $Z(2) = 3$, $Z(3) = 2$, $Z(4) = 7$, $Z(5) = 4$, $Z(6) = 3$, $Z(7) = 6$, $Z(8) = 15$, $Z(9) = 8$, $Z(10) = 4$, $Z(11) = 10$, $Z(12) = 8$, $Z(13) = 12$, $Z(14) = 7$, $Z(15) = 5$, $Z(16) = 31$, $\cdots\cdots$. 关于$Z(n)$ 的算术性质, 许多学者也进行了研究, 获得了不少有趣的结果. 参阅文献[1]、[44]、[14]、[46]及[51]. 例如文献[51] 中研究了方程$Z(n)+1 = S(n)$ 及$Z(n) = S(n)$ 的可解性, 并获得了这两个方程的所有正整数解, 其中$S(n)$ 为Smarandache 函数.

此外, J.Sandor [31] 在研究函数$Z(n)$ 的性质的同时, 引入了$Z(n)$ 的一个对偶函数$Z_*(n)$ 如下: $Z_*(n)$表示最大的正整数m 使得$\frac{m(m+1)}{2}$ 整除n. 即就是$Z_*(n) = \max\{m:\ m \in N,\ \frac{m(m+1)}{2} \mid n\}$, 其中$N$ 表示所有正整数之集合. 关于$Z_*(n)$ 的深刻性质, 我们至今了解的很少, 文献[31] 中也只

列出了$Z_*(n)$ 的一些简单性质, 其中之一是由函数$Z(n)$ 及$Z_*(n)$ 的定义不难推出:

$$Z_*(n) \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \leq Z(n). \tag{2-8}$$

同时在[52]中, J.Sandor 还证明了对任意素数$p \geq 5$ 正整数n 有

$$Z_*\left(p^n\right) = 1,\ Z_*\left(3^n\right) = 2.$$

在第四届国际数论与Smarandache问题研讨会期间, 张文鹏教授建议我们研究方程

$$Z(n) + Z_*(n) = n \tag{2-9}$$

的可解性, 同时他提出了下面的:

猜测: (A). 方程(2)只有有限个偶数解, 也许只有一个偶数解$n = 6$;
(B). 方程(2)的所有奇数解必为奇素数p (≥ 5) 的方幂.

最近，张瑾在文献[52] 中研究了这一问题，并彻底解决了猜测(B). 本文作者起初试图解决猜测(A), 但是没有成功. 于是我们考虑了方程

$$Z(n) + Z_*(n) = 2n \tag{2-10}$$

的可解性, 并利用初等及组合方法证明了下面的:

定理2.5 *设n 为任意正数, 则n 满足方程(3) 当且仅当n 为2 的方幂. 即就是 $n = 2^k$, 其中k为非负整数.*

当然我们定理的证明思路沿用了文献[52]的思想, 但是证明过程中体现了不同的技巧. 我们的技巧和方法似乎也不适应猜测(A).

证明 这节我们利用初等及组合方法给出定理的证明. 由伪Smarandache 函数$Z(n)$ 的性质知对于任意非负整数k, 我们有$Z(2^k) = 2^{k+1} - 1$. 而$Z_*(2^k) = 1$. 所以我们有

$$Z(2^k) + Z_*(2^k) = 2^{k+1} - 1 + 1 = 2^{k+1}.$$

所以$n = 2^k$ 一定是方程(3)的解.

现在我们证明方程(3)除了$n = 1$ 外, 没有其它奇数解. 事实上若$n \geq 3$ 为奇数, 则由于$n \mid \frac{(n-1)\cdot n}{2}$, 所以由$Z(n)$ 的定义知$Z(n) \leq n-1$. 由此及(1) 式立刻得到不等式

$$Z(n) + Z_*(n) \leq n - 1 + \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} < 2n.$$

所以n 不满足方程(3).

其次, 我们证明方程(3)除了$n = 2^k$ $(k \geq 1)$ 外, 再没有其它偶数解. 否则, 若偶数n满足方程(3), 且 $n \neq 2^k$, 则 $n = 2^k \cdot h$, 其中$h \geq 3$ 为奇数. 不妨令$Z(n) = m$. 若m 为偶数, 则由$Z(n)$ 的定义知 $n \mid \frac{m(m+1)}{2}$. 设$(n,\ m/2) = u$, $n = u \cdot v$, $m = 2u \cdot m_1$. 则 $(u,\ v) = 1$ 且$v \mid (m+1)$. 当$u > v$ 时，由$v \mid (m+1)$ 可得 $2u \cdot m_1 + 1 \equiv 0 \pmod v$, 由此推出$m_1 \equiv -\overline{2u} \pmod v$ 或者恒等式：

$$m_1 = v - \overline{2u},$$

其中$1 \leq \overline{2u} \leq v-1$ 且$2u \cdot \overline{2u} \equiv 1 \pmod v$.

所以$m = 2u \cdot (v - \overline{2u})$. 注意到当$1 \leq \overline{2u} \leq v-1$ 时, 显然有

$$m = 2u \cdot (v - \overline{2u}) \leq 2u \cdot (v-1).$$

由此及(1) 式并注意到$u > v$ 可得:

$$Z(n) + Z_*(n) \leq 2u \cdot (v-1) + \frac{\sqrt{8uv+1}-1}{2} < 2uv - 2u + \sqrt{2u} < 2n.$$

因此n 不可能满足方程(3).

当$u < v$ 时, 由于$v \mid (m+1)$ 可得$m = hv - 1$. 再由于$2u \mid m$ 立刻推出: $hv - 1 \equiv 0 \pmod{2u}$. 或者$h = \overline{v}$, 其中$\overline{v} \cdot v \equiv 1 \pmod{2u}$. 当$2 \leq \overline{v} \leq 2u-2$ 时, 注意到$u < v$ 我们有估计式:

$$Z(n) + Z_*(n) \leq \overline{v} \cdot v - 1 + \frac{\sqrt{8uv+1}-1}{2} \leq (2u-2)v + \sqrt{2v} < 2n.$$

当$\overline{v} = 2u-1$ 时, $v \equiv -1$ (mod $2u$, 所以$v = 2ut - 1$. 于是注意到$u < v$ 我们仍然有

$$Z(n) + Z_*(n) \ \ \leq \ \ \overline{v} \cdot v - 1 + \frac{\sqrt{8uv+1}-1}{2}$$

$$< \quad (2u-1)\cdot v - 1 + v + 1 = 2uv = 2n.$$

下面我们考虑m 为奇数的情况. 此时$m+1$ 必为偶数. 设$(n, \frac{m+1}{2}) = u$, $n = u \cdot v$, $m+1 = 2u \cdot m_1$. 于是$v \mid m$. 设$m = v \cdot h$. 若$u > v$, 则$2u \cdot m_1 \equiv 1 \pmod v$. 于是$m_1 = \overline{2u}$, 其中$2u \cdot \overline{2u} \equiv 1 \pmod v$. 从而$m = 2u \cdot m_1 - 1 = 2u \cdot \overline{2u} - 1 \le 2u \cdot (v-1) - 1$. 由此及前面的估计式(1)可得

$$\begin{aligned} Z(n) + Z_*(n) &\le 2u \cdot (v-1) - 1 + \frac{\sqrt{8uv+1}-1}{2} \\ &\le 2u \cdot v - 2u - 1 + \sqrt{2} \cdot u < 2uv = 2n. \end{aligned}$$

若$v > u$, 则$v \cdot h + 1 \equiv 0 \pmod{2u}$. 于是$h = 2u - \overline{v}$. 从而$m = v \cdot h = v \cdot (2u - \overline{v})$. 当$2 \le \overline{v} \le 2u-1$时, $m = v \cdot (2u - \overline{v}) \le v \cdot (2u-2)$, 所以我们有不等式

$$Z(n) + Z_*(n) \le v \cdot (2u-2) + \frac{\sqrt{8uv+1}-1}{2} \le 2u \cdot v - 2v + \sqrt{2} \cdot v < 2n.$$

当$\overline{v} = 1$ 时, 我们有$v = 2tu + 1$ 或者$u = \frac{v-1}{2t}$. 于是$m = v \cdot (2u-1)$, 从而

$$Z(n) + Z_*(n) \le v \cdot (2u-1) + \frac{\sqrt{8uv+1}-1}{2} < 2u \cdot v - v + v = 2n.$$

结合以上几种情况我们立刻推出n 为方程(3) 的解当且仅当$n = 2^k$, 其中k 为任意非负整数.

于是完成了定理的证明.

2.3.3 一个包含伪Smarandache 函数及Smarandache 可乘函数的方程

关于$Z(n)$ 的初等性质, 许多学者进行了研究，获得了不少有意义结果！详细情况可参阅文献[1]，[12]，[3] 及[31]. 这里我们列出下面几条简单性质：

(a). 对任意正整数α 及奇素数p, $Z(p^\alpha) = p^\alpha - 1$;

(b). 对任意正整数α, $Z(2^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1$;

(c). $Z(n)$ 不是加性函数, 即就是$Z(m+n) = Z(m) + Z(n)$ 不恒成立;

(d). $Z(n)$ 不是可乘函数, 即就是$Z(m\cdot n)=Z(m)\cdot Z(n)$ 不恒成立.

现在我们定义另一个算术函数$U(n)$ 如下: $U(1)=1$. 当$n>1$ 且$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为n 的标准素因数分解式时, 定义:

$$U(n)=\max\{\alpha_1p_1,\ \alpha_2p_2,\ \cdots,\ \alpha_sp_s\}$$

这个函数有时也被称为Smarandache 可乘函数. 之所以这样称是因为任意一个算数函数$f(n)$, 如果它满足性质$f(1)=1$, 当$n>1$ 且$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为n 的标准分解式时,

$$f(n)=\max\left\{f\left(p_1^{\alpha_1}\right),\ f\left(p_2^{\alpha_2}\right),\ \cdots,\ f\left(p_s^{\alpha_s}\right)\right\}$$

把这样的函数均称为Smarandache可乘函数. 关于它的简单性质, 虽然我们至今知道的不多, 但是也有不少人进行过研究, 获得了一些有理论价值的研究成果, 参阅文献[9] 及[44]. 例如沈虹在文献[9]中证明了渐近公式:

$$\sum_{n\le x}(U(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中$\zeta(s)$ 表示Riemann zeta-函数, $P(n)$ 表示n 的最大素因子.

本文的主要目的是利用初等方法研究方程$Z(n)=U(n)$ 及$Z(n)+1=U(n)$ 的可解性, 并获得了这两个方程的所有正整数解, 具体地说也就是证明了下面的:

定理2.6 对任意正整数$n>1$, 函数方程

$$Z(n)=U(n)$$

成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中p 为奇素数, m 为$\frac{p+1}{2}$ 的任意大于1 的因数. 即就是$m\mid\frac{p+1}{2}$ 且$m>1$.

定理2.7 对任意正整数n，函数方程

$$Z(n)+1=U(n)$$

成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中p 为奇素数，m 为$\frac{p-1}{2}$ 的任意正因数. 即就是$m\mid\frac{p-1}{2}$.

显然我们的定理彻底解决了方程$Z(n) = U(n)$ 及$Z(n) + 1 = U(n)$的可解性问题. 也就是证明了这两个方程有无穷多个正整数解, 并给出了它们每个解的具体形式！特别在区间[1, 100]中, 方程$Z(n) = U(n)$ 有9 个解, 它们分别是$n = 1, 6, 14, 15, 22, 28, 33, 66, 91$. 而方程$Z(n) + 1 = U(n)$ 在区间[1, 50] 中有19 个解，它们分别是$n = 3, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 19, 21,$
$23, 26, 29, 31, 34, 37, 39, 41, 43, 47$.

定理的证明 这节我们利用初等方法给出定理的直接证明. 首先证明定理2.6. 事实上当$n = 1$ 时, 方程$Z(n) = U(n) = 1$ 成立. 当$n = 2$, 3, 4, 5时, 显然n 不满足方程$Z(n) = U(n)$. 于是假定$n \geq 6$ 且满足方程$Z(n) = U(n)$, 不妨设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 为n 的标准素因数分解式, 并令$U(n) = U(p^{\alpha}) = \alpha p$. 于是由函数$Z(n)$ 及$U(n)$ 的定义可知αp 是最小的正整数使得n 满足下面的整除式:

$$n \mid \frac{\alpha p(\alpha p + 1)}{2}, \quad p^{\alpha} \mid n \tag{2-11}$$

现在我们证明在(1) 式中$\alpha = 1$. 事实上如果$\alpha > 1$, 则由$p^{\alpha} \mid n$ 立刻推出

$$p^{\alpha} \mid \frac{\alpha p(\alpha p + 1)}{2} \tag{2-12}$$

由于$(p,\ \alpha p + 1) = 1$，所以由上式立刻推出$p^{\alpha-1} \mid \alpha$. 当p为奇素数时显然(2)式是不可能的, 因为此时$p^{\alpha-1} > \alpha$, 与$p^{\alpha-1} \mid \alpha$矛盾. 当$p = 2$时，推出$\alpha = 2$. 这时(2)式成为$4 | \frac{4\times5}{2} = 10$，矛盾! 所以在(1)式中一定有$\alpha = 1$且$p$为奇素数. 此时可设$n = p \cdot m$. 则由(1)式可推出$p \cdot m \mid \frac{p(p+1)}{2}$, 即就是$m \mid \frac{p+1}{2}$. 显然$m \neq 1$. 否则$n = p$, $Z(p) = p-1$, $U(p) = p$与$Z(n) = U(n)$矛盾！而当$n = p \cdot m$, m为$\frac{p+1}{2}$的任意大于1的因数时，$Z(n) = p$, $U(n) = p$，所以一定有$Z(n) = U(n)$. 从而推出$n > 1$且满足方程$Z(n) = U(n)$当且仅当$n = p \cdot m$, m为$\frac{p+1}{2}$的任意大于1的因数.

于是完成了定理2.6的证明.

现在我们证明定理2.7. 显然$n = 1$不满足方程$Z(n) + 1 = U(n)$. 于是不妨设$n > 2$且满足方程$Z(n) + 1 = U(n)$, 并令$U(n) = U(p^{\alpha}) = \alpha p$. 于是由$Z(n) + 1 = U(n)$ 可得$Z(n) = \alpha p - 1$. 再由函数$Z(n)$及$U(n)$的定义可推出

$$n \mid \frac{\alpha p(\alpha p - 1)}{2}, \quad p^{\alpha} \mid n \tag{2-13}$$

由于$(p,\ \alpha p-1)=1$，所以由(3)式立刻推出$p^{\alpha-1}\mid\alpha$. 从而利用证明定理1的分析过程不难推出$\alpha=1$且p为奇素数. 所以可设$n=p\cdot m$. 再利用(3)式不难推出$m\mid\frac{p-1}{2}$. 而当$n=p\cdot m$, m为$\frac{p-1}{2}$的任意正因数时, 容易验证n满足方程$Z(n)+1=U(n)$. 所以方程$Z(n)+1=U(n)$成立当且仅当$n=p\cdot m$, m为$\frac{p-1}{2}$的任意正因数.

于是完成了定理2.7的证明.

2.4 伪Smarandache函数的相关问题

2.4.1 关于伪 Smarandache 函数的一个问题

在文献[14]中, Kenichiro Kashihara 建议我们求所有正整数n 使得伪Smarandache 函数$Z(n)$ 为n 的原根. 关于这一问题, 至今似乎没有研究, 至少我们没有看到相关的论文！通过数值检验我们发现这样的正整数n 虽然很少, 然而是存在的！正像Kenichiro Kashihara所指出的, $Z(4)=7$ 是4 的一个原根；$Z(3)=2$ 是3 的一个原根. 除了这两个正整数外, 是否还有其它正整数n 使得$Z(n)$ 为n 的原根? 本文利用初等方法研究了这一问题, 并得到彻底解决！具体地说也就是证明了下面的:

定理2.8 *设n 是存在原根的任意正整数, 则伪Smarandache 函数$Z(n)$ 为n 的原根当且仅当*

$$n=2,\ 3,\ 4$$

定理的证明 这节我们利用初等方法来完成定理的证明. 首先我们介绍一下原根的定义及其它的存在性. 设$n>1$ 为正整数, a 为任意整数且$(a,\ n)=1$. 则由初等数论中著名的Euler定理可知$a^{\phi(n)}\equiv 1\ (\mathrm{mod} n)$, 其中$\phi(n)$ 为Euler 函数, 即就是$\phi(n)$ 表示不超过n 且与n 互素的正整数的个数. 因此当$(a,\ n)$ 互素时, 至少存在一个正整数m 使得$a^m\equiv 1\ (\mathrm{mod} n)$. 设满足同余式$a^m\equiv 1\ (\mathrm{mod} n)$ 的最小正整数为m. 则当$m=\phi(n)$ 时, 称a 为模n 的原根. 然而, 并非所有正整数n 都有原根. 事实上关于原根的存在性, 我们有下面的:

引理2.4.1 *设$m>1$为任意正整数, 则模m存在原根当且仅当$m=2,\ 4,\ p^{\alpha},\ 2p^{\alpha}$, 其中$p$为奇素数, α为正整数.*

证明 参阅文献[13] 或者文献[11] 中第 6 章定理4.

现在我们应用这一引理来完成定理的证明. 显然$Z(2) = 3$ 是2 的一个原根；$Z(4) = 7$ 是4 的一个原根. 现在考虑$n = p^\alpha$, 其中p 为奇素数. 若$Z(n)$ 是模$n = p^\alpha$ 的原根, 则由$Z(n)$ 的定义及性质知$Z(n) = p^\alpha - 1$, 所以$p^\alpha - 1$ 为模$n = p^\alpha$ 的原根！又由于

$$Z^2(n) = (p^\alpha - 1)^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$$

且$p^\alpha - 1$ 为模$n = p^\alpha$ 的原根, 所以$2 = \phi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$. 由此式立刻推出$\alpha = 1$, $p - 1 = 2$. 既就是$n = 2 + 1 = 3$. 因此当$n = p^\alpha$ (p为奇素数)时, $Z(n)$ 为n 的原根当且仅当$n = p = 3$.

当$n = 2p^\alpha$ 时, 注意到前面列出的$Z(n)$ 的性质C)我们分两种情况讨论：

(1). 若$p^\alpha \equiv 3 \pmod 4$, 则由$Z(n)$ 的定义及性质可得$Z(n) = p^\alpha$. 因为$(p^\alpha,\ 2p^\alpha) = p^\alpha > 1$, 所以$Z(n) = p^\alpha$ 不可能为$n = 2p^\alpha$ 的原根.

(2). 若$p^\alpha \equiv 1 \pmod 4$, 则由$Z(n)$ 的定义及性质可得$Z(n) = p^\alpha - 1$. 因为$(p^\alpha - 1,\ 2p^\alpha) = 2 > 1$, 所以$Z(n) = p^\alpha - 1$ 也不可能为$n = 2p^\alpha$ 的原根.

综合以上结果以及n 的原根存在定理我们立刻推出$Z(n)$ 为n 的原根当且仅当$n = 2,\ 3,\ 4$.

于是完成了定理的证明.

第三章 素数

3.1 孪生素数

3.1.1 孪生素数的概念

如果p_1, p_2 为两个素数, 且$p_1 < p_2$, $p_1 - p_2 = 2$, 那么我们称这两个数为孪生素数. 例如, 3 与5, 5 与7, 11 与13, 17 与19, 29 与31, $\cdots\cdots$, 都是孪生素数. 关于孪生素数的相关性质一些学者作过相应的研究, 获得了很多有趣的结果, 参阅文献[58], [11], [10] 及[13]. 在参考文献[14]中, Kenichiro kashihara 还介绍了伪孪生素数. 其定义如下:

定义3.1 *设p 为一个正整数, 那么p 和$p+2$ 称为伪孪生素数当且仅当*

$$\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{(p+1)!+1}{p+2}$$

是整数.

3.1.2 孪生素数的两个相关定理

Kenichiro kashihara 在参考文献[14]中还提出了下面的两个问题:

问题1: *设p 为正整数, 证明p 和$p+2$ 为孪生素数当且仅当*

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}$$

是整数.

问题2: *是否存在这样的一些素数, 它们是伪孪生素数但又不是经典的孪生素数?*

关于这两个问题, 好像至今没有人研究过, 至少我们没有看到过相关的文章. 本文的主要目的是用初等的方法来研究这两个问题, 并且彻底的解决了它们. 即就是, 我们证明了如下的:

定理3.1 设p 为正整数, 那么p 和$p+2$ 为孪生素数当且仅当

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}$$

是整数.

定理3.2 伪孪生素数一定是经典的孪生素数除了$p=1,\ p+2=3$ 两种情况.

定理的证明 在这一部分, 我们直接完成这两个定理的证明. 首先我们证明如果p 和$p+2$ 是孪生素数, 那么

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}$$

是整数.

事实上从维尔斯定理我们知道, 对任意的素数p,

$$(p-1)!\equiv -1(\mathrm{mod} p).$$

于是

$$p \mid (p-1)!+1.$$

所以

$$\frac{(p-1)!+1}{p}$$

是整数.

由于$p+2$ 是素数, 我们仍然有$(p+1)!+1\equiv 0(\mathrm{mod} p+2)$. 于是

$$(p-1)!\cdot p\cdot(p+1)+1\equiv 0(\mathrm{mod} p+2)$$

或者

$$2(p-1)!+1\equiv 0(\mathrm{mod} p+2).$$

那就是说

$$\frac{2(p-1)!+1}{p+2}$$

是整数.

注意到

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}=\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{2(p-1)!+1}{p+2},$$

从(1) 和(2) 我们知道

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}$$

是整数.

现在我们证明如果

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2} \tag{3-1}$$

是整数, 那么p 和$p+2$ 一定是素数.

事实上如果这个结论是不正确的, 那么将有三种情形:

(a) p 和$p+2$ 都不是素数;

(b) p 是素数, $p+2$ 不是素数;

(c) p 不是素数, $p+2$ 是素数.

如果情形(a) 成立, 那么至少存在两对整数a 与b, c 与d 且$p=a\cdot b$, $p+2=c\cdot d$. 很显然, $a<p$, $b<p$, $c<p+2$, $d<p+2$. 如果$p=4$, $p+2=6$, 那么(3)不是整数. 所以我们猜想$p>4$, 这次$a|(p-1)!$ 且$b|(p-1)!$, 所以$p=ab|(p-1)!$ (如果$a=b$, 那么$2a|(p-1)!$, 所以我们有$p|(p-1)!$). 因此

$$\frac{(p-1)!}{p}$$

及

$$\frac{2(p+1)!}{p+2}$$

都是整数. 但是

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}$$

不是整数. 所以

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}$$

不是整数.

如果情形(b) 成立, 那么

$$\frac{(p-1)!+1}{p}$$

是整数且

$$\frac{2(p+1)!}{p+2}$$

是整数,

但是

$$\frac{1}{p+2}$$

不是整数.

所以

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}=\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{2(p+1)!}{p+2}+\frac{1}{p+2}.$$

不是整数.

如果情形(c) 成立, 那么

$$\frac{(p-1)!}{p}$$

是整数, 且

$$\frac{2(p+1)!+1}{p+2}$$

是整数, 但是

$$\frac{1}{p}$$

不是整数.

所以

$$(p-1)!\left\{\frac{1}{p}+\frac{2}{p+2}\right\}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}=\frac{(p-1)!}{p}+\frac{2(p+1)!+1}{p+2}+\frac{1}{p}$$

不是整数.

这样便完成了定理3.1的证明.

现在我们证明定理3.2. 注意到等式

$$\begin{aligned}&\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{(p+1)!+1}{p+2}=\frac{(p-1)!}{p}+\frac{(p+1)!+1}{p+2}+\frac{1}{p}\\ =\ &\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{(p+1)!}{p+2}+\frac{1}{p+2}=\frac{(p-1)!}{p}+\frac{(p+1)!}{p+2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}.\end{aligned}$$

如果p 是素数, $p+2$ 不是素数, 那么在式子

$$\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{(p+1)!}{p+2}+\frac{1}{p+2},$$

中$\frac{1}{p+2}$ 不是一个整数.

如果$p+2$ 是素数且$p>1$ 不是素数, 那么在式子

$$\frac{(p-1)!}{p}+\frac{(p+1)!+1}{p+2}+\frac{1}{p},$$

中$\frac{1}{p}$ 不是整数.

如果p 和$p+2$ 都不是素数且$p>1$, 那么在式子

$$\frac{(p-1)!}{p}+\frac{(p+1)!}{p+2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2},$$

中$\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}$ 不是一个整数.

这样便完成了定理3.2的证明.

第四章 关于无k 次幂因子数的上界估计

4.1 无k 次幂因子数的定义

无k 次幂因子数的定义是这样给定的：

定义4.1 设$k \geq 2$为给定的正整数, $n > 1$为任意自然数. 如果对任意正整数$m > 1$有$m^k \dagger n$, 则称n为无k次幂因子数, 特别当$k = 2$, 3时, 称n为无平方因子数及无立方因子数.

4.2 无k 次幂因子数的上界估计

关于无k次幂因子数的简单性质, 许多教材中都有介绍. 关于它的深入性质, 不少学者进行过研究, 获得了一系列重要的结果. 参阅文献[55]及[56]. 例如H.L.Montgomery及R.C.Vaughan在文献[57]中证明了如下结论：设整数$k \geq 2$, $Q_k(x)$ 表示不超过x 的所有无k 次幂因子数的个数, 则在广义黎曼假设下有渐近公式：

$$Q_k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + O\left(x^{\frac{1}{k+1}+\epsilon}\right),$$

其中ϵ表示任意给定的正数，$\zeta(k)$表示黎曼ζ-函数.

特别在广义黎曼假设下有更强的渐近公式：

$$Q_2(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O\left(x^{\frac{9}{28}+\epsilon}\right).$$

另一方面, 设$a_n(k)$ 表示第n 个无k 次幂因子数. 最近在文献[4]中, Mladem及Krassimir给出了$a_n(2)$ 的一个上界估计, 即就是证明了

$$a_n(2) < [\frac{1}{4}(n^2 + 3n + 4)],$$

其中$[x]$ 表示不大于x 的最大正整数. 同时他们还提出了下列两个问题：

问题1 是否存在一个常数$c > 1$使得$a_n(2) < cn$?

问题2 是否有$c < 2$?

在文献[5]中, Xigeng Chen完全解决了这两个问题. 他证明了:

$$a_n(2) < 1.8n.$$

事实上这是初等数论中的一个简单问题, 本文作为文献[59] 的注释，利用初等方法证明了更为一般且更为精确的结论, 即就是下面的:

定理4.1 设$k \geq 2$为给定的整数. 对任意自然数$n > 1$, 我们有渐近公式:

$$a_n(k) = \zeta(k)n + O\left(n^{\frac{1}{k}}\right),$$

其中$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$为黎曼$\zeta$-函数.

由此定理及极限的定义和性质我们立刻得到下面的推论:

推论4.1 对任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$N > 0$使得当$n > N$时有

$$(\zeta(k) - \varepsilon)n < a_n(k) < (\zeta(k) + \varepsilon)n.$$

特别有

$$(1.64 - \varepsilon)n < a_n(2) < (1.65 + \varepsilon)n.$$

推论4.2 对任意正整数$k \geq 3$, 我们有极限式:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(k)}{n} = \zeta(k); \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(2)}{n} = \frac{\pi^2}{6}.$$

证明 事实上利用初等方法很容易获得本文的结论. 设$Q_k(x)$ 表示所有不大于x 的无k 次幂因子数的个数. 则显然有$Q_k(a_n(k)) = n$. 另一方面, 由于任一正整数a 可以唯一的表示为$a = b^k d$, 其中b 是一正整数, d 为无k 次幂因子数. 于是由Möbius函数的性质知:

$$Q_k(x) = \sum_{n\leq x} \sum_{d^k|n} |\mu(d)| = \sum_{nd^k\leq x} |\mu(d)| = \sum_{d^k\leq x} |\mu(d)| \sum_{n\leq x/d^k} 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d^k \le x} |\mu(d)| \left(\frac{x}{d^k} + O(1)\right) = x \sum_{d^k \le x} \frac{|\mu(d)|}{d^k} + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right) \\
&= x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^k} + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{x}{\zeta(k)} + O\left(x^{\frac{1}{k}}\right),
\end{aligned}
$$

其中我们用到恒等式$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^k} = \frac{1}{\zeta(k)}$.

注意到$Q_k(a_m(k)) = m$, 取$x = a_m(k)$, 则有

$$
m = \frac{1}{\zeta(k)} a_m(k) + O\left(a_m^{\frac{1}{k}}(k)\right) = \frac{1}{\zeta(k)} a_m(k) + O\left(m^{\frac{1}{k}}\right)
$$

即:

$$
a_n(k) = \zeta(k) n + O\left(n^{\frac{1}{k}}\right).
$$

于是定理得到证明.

注意到$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, 我们不难推出推论4.1 及推论4.2. 同时也说明在问题1及问题2中的常数c 满足$c > \frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$.

第五章　伪Smarandache 无平方因子函数

5.1　引言

首先我们来看伪Smarandache 无平方因子函数的定义

定义5.1　对任意正整数n, 著名的伪Smarandache 无平方因子函数$Zw(n)$ 定义为最小的正整数m 使得$n \mid m^n$. 即就是$Zw(n) = \min\{m : m \in N,\ n|m^n\}$.

这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache 教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的, 关于这一函数的一些基本性质我们列举如下:

5.2　$Zw(n)$函数的基本定理

.

性质5.2.1　对任意正整数n, 如果$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示n 的标准分解式, 那么$Zw(n) = p_1 p_2 \cdots p_r$. 特别地, $Zw(p) = p$, 这里p 为任意素数.

性质5.2.2　当且仅当n 为无平方因子数时, $Zw(n) = n$.

性质5.2.3　对任意正整数n, $Zw(n) \le n$.

性质5.2.4　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Zw(n)}{n}$$

是收敛的.

性质5.2.5　$Zw(n)$ 是可乘函数, 即就是, 当$GCD(m,\ n) = 1$ 时,

$$Zw(m \cdot n) = Zw(m) \cdot Zw(n).$$

性质5.2.6 $Zw(n)$ 不是可加函数, 即就是,

$$Zw(m+n) \neq Zw(m) + Zw(n).$$

性质5.2.7 当$n \geq 1$时, $Zw(n) \geq 1$.

性质5.2.8 对任意实数$\alpha > 0$ 及$x \geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} (Zw(n))^{\alpha} = \frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)} \prod_{p} \left[1 - \frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right] + O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

性质5.2.9 当$n \geq 1$ 时, $0 < \dfrac{Zw(n)}{n} \leq 1$.

性质5.2.10 对于任意实数$\epsilon > 0$, 存在正整数$n \geq 1$ 满足

$$\frac{Zw(n)}{n} < \epsilon.$$

性质5.2.11 方程$\dfrac{Zw(n)}{n} = 1$, 有无穷多个解.

性质5.2.12 当n 为偶数时, $Zw(n)$ 是偶数; 当n为奇数时, $Zw(n)$ 是奇数.

性质5.2.13 丢番图方程$Zw(n) = Zw(n+1)$ 没有解.

性质5.2.14 对任意正整数n, 有

$$\sum_{k=1}^{n} Zw(k) > \frac{6 \cdot n}{\pi^2}.$$

性质5.2.15 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(Zw(n))^{a}}, \quad a \in R, \quad a > 0$$

是发散的.

性质5.2.16 对任意实数α, s 满足$s-\alpha>1$ 及$\alpha>0$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Zw(n))^{\alpha}}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2s-2\alpha)}\prod_{p}\left[1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right],$$

其中$\zeta(s)$ 为 Riemann zeta-函数, $\prod\limits_{p}$ 表示对所有素数求积.

5.3 关于伪Smarandache 无平方因子函数的一个相关问题

关于伪Smarandache无平方因子函数的其他性质国内外学者也做了很多的研究, 并且得到了一些有趣的结果, 与此同时, 乐茂华提出了几个关于函数$Zw(n)$ 的问题(参阅文献[60]), 比如:

问题1 估计式子$\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Zw(n)}$ 的敛散性.

问题2 估计极限$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{Zw(k)}{\theta(k)}$ 值, 其中$\theta(k)=\sum\limits_{n\leq x}\ln(Zw(n))$.

问题1 乐茂华已经在参考文献[61] 中得到解决. 证明了$\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Zw(n)}$ 是收敛的. 作者在本文则应用初等的方法估计$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{Zw(n)}{\theta(k)}$, 其中$\theta(k)=\sum\limits_{n\leq x}\ln(Zw(n))$, 并且彻底的解决了问题2. 即就是我们证明了如下的结论:

定理5.1 假设$Zw(k)$ 和$\theta(k)$ 如问题2 中所定义, 那么我们有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{Zw(k)}{\theta(k)}=0$$

其中$\theta(k)=\sum\limits_{n\leq x}\ln(Zw(n))$

定理的证明 为了完成定理的证明, 我们需要如下的引理.

引理5.3.1 对任意实数$k \geq 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n \leq k} |\mu(n)| = \frac{6k}{\pi^2} + O(\sqrt{k})$$

其中, $\mu(n)$ 为莫比乌斯函数, 且$|\mu(n)| = \sum_{d^2|n} |\mu(d)|$, 参阅参考文献[13].

证明

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq k} |\mu(n)| &= \sum_{n \leq k} \sum_{d^2|n} \mu(d) \\
&= \sum_{md^2 \leq k} \mu(d) \\
&= \sum_{d \leq \sqrt{k}} \mu(d) \sum_{m \leq \frac{k}{d^2}} 1 \\
&= k \sum_{d \leq \sqrt{k}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{k}) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{k}) \\
&= \frac{6k}{\pi^2} + O(\sqrt{k})
\end{aligned}$$

现在, 我们应用引理来完成定理的证明.
因为

$$\begin{aligned}
\theta(k) &= \sum_{n \leq k} \ln(Zw(n)) \geq \sum_{n \leq k} |\mu(n)| \ln(n) \geq \sum_{\sqrt{k} \leq n \leq x} |\mu(n)| \ln(\sqrt{k}) \\
&= \frac{1}{2} \ln k \sum_{\sqrt{k} \leq n \leq k} |\mu(n)| \\
&= \frac{1}{2} \ln k \left(\sum_{n \leq k} |\mu(n)| - \sum_{n \leq \sqrt{k}} |\mu(n)| \right)
\end{aligned}$$

从引理5.3.1 我们知道

$$\theta(k) \geq \frac{1}{2} \ln k \left(\frac{6k}{\pi^2} + O(\sqrt{k}) \right)$$

那么

$$\lim_{k\to\infty}\frac{Zw(n)}{\theta(k)}\leq\lim_{k\to\infty}\frac{Zw(n)}{\frac{1}{2}\ln k\left(\frac{6k}{\pi^2}+O(\sqrt{k})\right)}\leq\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\frac{1}{2}\ln k\left(\frac{6k}{\pi^2}+O(\sqrt{k})\right)}=0$$

这样我们完成了定理的证明.

5.3.1 关于$Zw(n)$ 函数的渐近公式

上一节的定理5.1 是本书作者在《Scientia Magna》上发表的一篇文章中的一个有趣定理, 后来我们发现有其他学者得到了比上文更严谨的结论和相关的渐近公式, 现把其列举如下, 有兴趣的学者可以作以比较参考：

定理5.2 对任意正整数$n>1$, 我们有估计式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

证明 令$U(n)=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln(Zw(k))}{\ln k}$. 首先我们估计$U(n)$ 的上界. 事实上当$k>1$ 时，由$Zw(k)$ 的定义我们不难推出$Zw(k)$ 表示k 的所有不同素因数的乘积, 所以对任意正整数k 有$Zw(k)\leq k$ 及$\ln(Zw(k))\leq\ln k$, 从而有估计式:

$$U(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{\ln k}=n-1\leq n. \tag{5-1}$$

其次我们估计$U(n)$ 的下界. 对任意正整数$2\leq k\leq n$, 设$k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为k 的标准分解式, 我们将区间[2, n] 中的所有整数分成两个子集A 及B, 其中A 表示区间[2, n] 中所有满足条件$\alpha_i\geq 2$ ($i=1$, 2, $\cdots$, s) 的正整数k 的集合; B 表示区间[2, n] 中所有满足至少有一个$\alpha_i=1$ ($1\leq i\leq s$)的正整数k 的集合. 于是我们有

$$U(n)\ =\ \sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k}\geq\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln n}$$

$$= \frac{1}{\ln n}\sum_{k\in A}\ln(Zw(k))+\frac{1}{\ln n}\sum_{k\in B}\ln(Zw(k)). \tag{5-2}$$

显然由集合A 的定义可知A 是区间$[2,\ n]$ 中所有Square-full 数的集合, 所以我们有估计式:

$$\sum_{k\in A}\ln(Zw(k))\le\sum_{k\in A}\ln k\le\sqrt{n}\cdot\ln n. \tag{5-3}$$

另一方面, 对于任意$n\in B$, 一定存在一个素数p, 使得$p|n$ 且$\left(p,\frac{n}{p}\right)=1$. 同时注意到素数定理的几种不同形式:

$$\sum_{k\le n}\frac{\ln p}{p}=\ln n+O\left(1\right),$$

$$\sum_{k\le n}\ln p=n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

及

$$\sum_{k\le n}\frac{\ln p}{p^2}=D+O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

其中D 为正常数. 于是我们有估计式

$$\begin{aligned}\sum_{k\in B}\ln(Zw(k)) &= \sum_{\substack{pk\le n\\(p,\ k)=1}}\ln(Zw(pk))=\sum_{\substack{pk\le n\\(p,\ k)=1}}(\ln p+\ln(Zw(k)))\\ &\ge \sum_{\substack{pk\le n\\(p,\ k)=1}}\ln p=\sum_{p\le n}\ln p\sum_{\substack{k\le\frac{n}{p}\\(p,\ k)=1}}1\\ &= \sum_{p\le n}\ln p\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{p^2}+O(1)\right)\\ &= n\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p}-n\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p^2}+O\left(\sum_{p\le n}\ln p\right)\\ &= n\ln n+O(n). \end{aligned}\tag{5-4}$$

由(5-2), (5-3)及(5-4)式我们不难得到估计式:

$$U(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k}\ge\frac{1}{\ln n}\sum_{k\in B}\ln(Zw(k))+O\left(\sqrt{n}\ln n\right)$$

$$\geq \frac{1}{\ln n}(n\ln n + O(n)) + O\left(\sqrt{n}\ln n\right) = n + \left(\frac{n}{\ln n}\right). \qquad (5\text{-}5)$$

结合(5-2)及(5-5) 式我们立刻推出渐近公式:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

于是完成了定理的证明.

在上述定理中取$n \to \infty$, 立即得到如下推论

推论5.1 对任意正整数n, 我们有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k} = 1.$$

5.3.2 关于函数$\frac{Zw(k)}{\theta(k)}$的渐近公式

定理5.3 对任意正整数$k > 1$, 令$\theta(k) = \sum\limits_{n\leq k}\ln(Zw(n))$, 我们有渐近公式

$$\frac{Zw(k)}{\theta(k)} = \frac{Zw(k)}{\sum\limits_{n\leq k}\ln(Zw(n))} = O\left(\frac{1}{\ln k}\right).$$

证明 事实上, 对任意实数$x > 1$ 和任意正整数n, 根据Möbius函数$\mu(n)$ 的性质:

$$|\mu(n)| = \sum_{d^2|n}\mu(d)$$

并注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$

我们有

$$\sum_{n\leq x}|\mu(n)| = \sum_{n\leq x}\sum_{d^2|n}\mu(d)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{md^2\leq x}\mu(d)\\
&= \sum_{d\leq\sqrt{x}}\mu(d)\sum_{m\leq\frac{x}{d^2}}1\\
&= \sum_{d\leq\sqrt{x}}\mu(d)\left(\frac{x}{d^2}+O(1)\right)\\
&= x\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}-\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)+O\left(\sum_{d\leq\sqrt{x}}|\mu(d)|\right)\\
&= x\left(\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)+O\left(\sqrt{x}\right)\\
&= \frac{6}{\pi^2}x+O\left(\sqrt{x}\right).
\end{aligned}
$$

下面我们利用这个结论来证明定理. 对任意无平方因子数n, $Zw(n)=n$, 则有

$$
\begin{aligned}
\theta(k) &= \sum_{n\leq k}\ln\left(Zw(n)\right)\\
&\geq \sum_{n\leq k}|\mu(n)|\ln n\\
&\geq \sum_{\sqrt{k}\leq n\leq k}|\mu(n)|\ln(\sqrt{k})\\
&= \frac{1}{2}\ln k\sum_{\sqrt{k}\leq n\leq k}|\mu(n)|\\
&= \frac{1}{2}\ln k\left(\sum_{n\leq k}|\mu(n)|-\sum_{n\leq\sqrt{k}}|\mu(n)|\right).
\end{aligned}
\tag{5-6}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\theta(k) &\geq \frac{1}{2}\ln k\left(\sum_{n\leq k}|\mu(n)|-\sum_{n\leq\sqrt{k}}|\mu(n)|\right)\\
&\geq \frac{1}{2}\ln k\left(\frac{6}{\pi^2}k+O(\sqrt{k})\right)\\
&= \frac{3}{\pi^2}k\cdot\ln k+O(\sqrt{k}\cdot\ln k).
\end{aligned}
\tag{5-7}
$$

注意到$Zw(n) \leq n$, 于是我们立即得到

$$0 < \frac{Zw(k)}{\theta(k)} \leq \frac{k}{\frac{3}{\pi^2}k \cdot \ln k + O(\sqrt{k} \cdot \ln k)} = O\left(\frac{1}{\ln k}\right)$$

或

$$\frac{Zw(k)}{\theta(k)} = O\left(\frac{1}{\ln k}\right).$$

这就完成了定理的证明.

根据定理我们立即得到如下结论:

推论5.2 对任意正整数k, 我们有如下结论

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Zw(k)}{\theta(k)} = 0.$$

5.4 伪Smarandache 无平方因子函数的四个相关问题

对于伪Smarandache 无平方因子函数来说, 很显然我们知道如果$n > 1$, 那么

$$Zw(n) = \prod_{p|n} p,$$

其中$\prod\limits_{p|n}$ 表示能整除n 的所有不同素数的乘积(参阅参考文献[1]). 从这个公式我们容易得到函数$Zw(n)$ 的值. 例如, $Zw(1) = 1$, $Zw(2) = 2$, $Zw(3) = 3$, $Zw(4) = 2$, $Zw(5) = 5$, $Zw(6) = 6$, $Zw(7) = 7$, $Zw(8) = 2$, $Zw(9) = 3$, $Zw(10) = 10$, $\cdots$. 事实上如果n 无平方因子数, 那么$Zw(n) = n$. 在参考文献[60] 中, Felice Russo 研究了函数$Zw(n)$ 的性质, 并且提出了下面的四个问题:

问题1: 找出所有满足等式$Zw(n) = Zw(n+1) \cdot Zw(n+2)$ 的n 值.

问题2: 求解等式$Zw(n) \cdot Zw(n+1) = Zw(n+2)$.

问题3: 求解等式$Zw(n)\cdot Zw(n+1)=Zw(n+2)\cdot Zw(n+3)$.

问题4: 找出所有满足等式$S(n)=Zw(n)$ 的n, 其中$S(n)$是*Smarandache* 函数.

这篇文章的主要母的是利用初等方法来研究着四个问题, 并且彻底的解决了它们. 那就是, 我们证明了下面的:

定理5.4 下面的三个等式没有正整数解.

$$Zw(n)=Zw(n+1)\cdot Zw(n+2)$$
$$Zw(n)\cdot Zw(n+1)=Zw(n+2)$$
$$Zw(n)\cdot Zw(n+1)=Zw(n+2)\cdot Zw(n+3)$$

定理5.5 存在无限个正整数n 满足等式$S(n)=Zw(n)$, 其中$S(n)$定义为$S(n)=\min\{k:\ k\in N,\ n\mid k!\}$ 是*Smarandache* 函数.

证明 在这一部分, 我们先直接来证明定理5.4. 首先我们证明等式$Zw(n)=Zw(n+1)\cdot Zw(n+2)$ 没有正整数解. 显然I $n=1$ 不是这一等式的解. 事实上如果$n=1$, 那么

$$1=Zw(1)\neq 2\cdot 3=Zw(2)\cdot Zw(3).$$

如果$n>1$, 假设等式(1) 没有$n=n_0$ 的解, 那么

$$Zw(n_0)=Zw(n_0+1)\cdot Zw(n_0+2).$$

对$n=n_0$ 的所有素数因子p, 显然$p\mid Zw(n_0)$.

从 $$Zw(n_0)=Zw(n_0+1)\cdot Zw(n_0+2),$$
我们可得到 $$p\mid Zw(n_0+1)\cdot Zw(n_0+2).$$
这就是说, $$p\mid Zw(n_0+1)\ \text{or}\ p\mid Zw(n_0+2).$$

(a) 如果$p\mid Zw(n_0+1)$, 那么$p\mid(n_0+1)$, 结合$p\mid n_0$ 我们有$p\mid n_0+1-n_0=1$, 得出矛盾.

(b) 如果$p\mid Zw(n_0+2)$, 那么$p\mid(n_0+2)$, 结合$p\mid n_0$ 我们有$p\mid n_0+2-n_0=2$, 那么$n_0=p=2$.

从等式(1) 我们有

$$2 = Zw(2) \neq 3 \cdot 2 = Zw(3) \cdot Zw(4),$$

这是不可能的. 所以等式(1) 没有正整数解.

应用证明定理1 的方法, 我们发现等式(2) 和等式(3) 也没有正正整数. 这样我们便证明了定理5.4.

为了证明定理5.5, 我们需要函数$S(n)$ 的如下一些引理:

引理5.4.1 假设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示n 的标准素因数分解式, 那么

$$S(n) = \max_{1 \leq i \leq k} \{S(p_i^{\alpha_i})\}.$$

证明 参阅参考文献[64].

引理5.4.2 如果p 是一个素数, 那么$S(p^k) \leq kp$; 如果$k < p$, 那么$S(p^k) = kp$, 其中k 是任意的正整数.

证明 参阅参考文献[65].

现在我们应用这两个简单的引理来证明定理5.5. 很显然所有的素数p 为等式$S(n) = Zw(n)$ 的解. 所有有无限多个正整数n 满足等式$S(n) = Zw(n)$.

现在我们构造无限多个合数n 满足等式$S(n) = Zw(n)$, 假设$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1} \cdot p_k^{\alpha_k}$, 其中$p_i$ 为不同的素数, 并且$p_k > \alpha_k = p_1 p_2 \cdot \cdots \cdot p_{k-1}$. 这次, 从函数$S(n)$ 和$Zw(n)$ 的定义我们有$S(n) = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1} \cdot p_k$ 且$Zw(n) = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1} \cdot p_k$. 因此所有的合数$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1} \cdot p_k^{\alpha_k}$ (其中p_i 表示不同的素数, 并且$p_k > \alpha_k = p_1 p_2 \cdot \cdots \cdot p_{k-1}$) 满足等式$S(n) = Zw(n)$.

注意到k 为任意的正整数且有无限多个素数, 所以有无限多个合数n 满足等式$S(n) = Zw(n)$.

这样我们便证明了定理5.5.

第六章 Smarandache 函数相关问题

6.1 引言

函数的均值估计是数论研究的重要课题之一, 是研究各种数论问题不可缺少的工具. 本部分列出一些学者所作的关于Smarandache 相关函数的均值及其部分研究成果.

6.2 关于F.Smarandache LCM函数与除数函数的一个混合均值

著名的F.Smarandache LCM 函数的定义:

定义6.2.1 对任意的正整数n, *F.Smarandache LCM* 函数$SL(n)$ 定义为最小的正整数k 使得$n \mid [1,\ 2,\ \cdots,\ k]$, 其中$[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$ 表示$1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 的最小公倍数.

例如, $SL(n)$ 的前几个值是$SL(1)=1$, $SL(2)=2$, $SL(3)=3$, $SL(4)=4$, $SL(5)=5$, $SL(6)=3$, $SL(7)=7$, $SL(8)=8$, $SL(9)=9$, $SL(10)=5$, $SL(11)=11$, $SL(12)=4$, $SL(13)=13$, $SL(14)=7$, $SL(15)=5$, $SL(16)=16$, $\cdots\cdots$. 由$SL(n)$ 的定义我们容易推出如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是n 的标准分解式, 那么

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_r^{\alpha_r}\}. \tag{6-1}$$

关于$SL(n)$ 的初等性质, 许多学者进行了研究, 获得了一系列有趣的结果, 参阅文献[19], [6], [7] 及[66]. 例如Murthy [19] 证明了如果n 是一个素数, 那么$SL(n)=S(n)$, 这里$S(n)$ 是F.Smarandache 函数. 即就是, $S(n)=\min\{m:\ n|m!,\ m\in N\}$. 同时Murthy [19] 还提出了下面的问题:

$$SL(n)=S(n),\quad S(n)\neq n\ ? \tag{6-2}$$

Le Maohua [6] 完全解决了这个问题, 并证明了下面的结论:

任何满足(2) 的整数可表示为

$$n = 12 \quad \text{或者} \quad n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} p,$$

其中$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r,\ p$ 是不同的素数且$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 是满足$p > p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \cdots, r$ 的正整数.

此外, Lv Zhongtian [7] 研究了$SL(n)$ 的均值问题, 证明了对任意给定的正整数k 及任意实数$x > 2$ 有渐近公式

$$\sum_{n \le x} SL(n) = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中$c_i\ (i = 2,\ 3, \cdots, k)$ 是可计算的常数.

葛健[66] 中还研究了$[SL(n) - S(n)]^2$ 的均值分布问题, 证明了渐近公式:

$$\sum_{n \le x} [SL(n) - S(n)]^2 = \frac{2}{3} \cdot \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta-函数, $c_i\ (i = 1,\ 2, \cdots,\ k)$ 是可计算的常数.

本文的主要目的是研究一个包含F.Smarandache LCM 函数$SL(n)$ 与Dirichlet 除数函数$d(n)$ 的混合均值问题, 并给出一个较强的渐近公式. 具体地说也就是证明下面的:

定理6.1 设$k \ge 2$ 为给定的整数. 则对任意实数$x \ge 2$, 我们有渐近公式:

$$\sum_{n \le x} d(n) \cdot SL(n) = \frac{\pi^4}{36} \cdot \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中$d(n)$ 为Dirichlet 除数函数, 即就是n 的所有正因数的个数$d(n) = \sum_{d|n} 1$, $c_i\ (i = 2,\ 3, \cdots,\ k)$ 为常数.

证明 在这一部分, 我们用初等及解析方法直接给出定理的证明. 事实上在和式

$$\sum_{n \le x} d(n) \cdot SL(n) \tag{6-3}$$

中, 我们将所有$1 \leq n \leq x$ 分为两个集合U 与V, 其中集合U 包含所有那些满足存在素数p 使得$p|n$ 且$p > \sqrt{n}$ 的正整数n; 而集合V 包含区间$[1,\ x]$ 中不属于集合U 的那些正整数. 于是利用性质(1) 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\in U} d(n)\cdot SL(n) &= \sum_{\substack{n\leq x\\ p|n,\ \sqrt{n}<p}} d(n)\cdot SL(n) = \sum_{\substack{np\leq x\\ n<p}} d(np)\cdot SL(np)\\ &= \sum_{\substack{np\leq x\\ n<p}} 2p\cdot d(n) = \sum_{n\leq\sqrt{x}} 2d(n) \sum_{n<p\leq\frac{x}{n}} p. \qquad (6\text{-}4)\end{aligned}$$

设$\pi(x) = \sum\limits_{p\leq x} 1$. 于是利用Abel 求和公式(参阅文献[13] 中定理4.2) 及素数定理(文献[67] 中定理3.2):

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i\cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中c_i $(i = 1,\ 2, \cdots, k)$ 为常数且$c_1 = 1$.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n<p\leq\frac{x}{n}} p &= \frac{x}{n}\cdot\pi\left(\frac{x}{n}\right) - n\cdot\pi(n) - \int_{n}^{\frac{x}{n}} \pi(y)dy\\ &= \frac{x^2}{2n^2\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i\cdot x^2\cdot\ln^i n}{n^2\cdot\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{n^2\cdot\ln^{k+1} x}\right), \qquad (6\text{-}5)\end{aligned}$$

其中a_i 为可计算的常数.

于是注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{36},$$

结合(6-4) 及(6-5) 式可得：

$$\sum_{n\in U} d(n)\cdot SL(n) = \frac{x^2}{\ln x}\cdot\sum_{n\leq\sqrt{x}} \frac{d(n)}{n^2} + \sum_{n\leq\sqrt{x}}\sum_{i=2}^{k} \frac{2a_i\cdot x^2\cdot\ln^i n}{n^2\cdot\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{6-6}$$

其中b_i 为可计算的常数.

现在我们讨论集合V 中的情况, 由(1) 式及集合V 的定义知对任意$n\in V$, 当n 的标准分解式为$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 时, 我们有两种情况$SL(n)=p_r\le\sqrt{n}$ 或者

$$SL(n)=\max_{1\le i\le r}\{p_i^{\alpha_i}\}=p_i^{\alpha_i},$$

其中$\alpha_i\ge 2$.

于是由此分析我们有:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in}d(n)\cdot SL(n) &\le \sum_{np\le x}d(n)\sqrt{np}+\sum_{\substack{np^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}}(\alpha+1)\cdot d(n)\cdot p^\alpha\\ &\le \sum_{n\le x}d(n)\cdot\sqrt{n}\cdot\ln n\le x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x, \end{aligned}\tag{6-7}$$

其中我们用到渐近公式:

$$\sum_{n\le x}d(n)=x\cdot\ln x+O(x).$$

由集合U 及V 的定义并结合(6-3), (6-6) 及(6-7) 式我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}d(n)\cdot SL(n) &= \sum_{n\in U}d(n)\cdot SL(n)+\sum_{n\in V}d(n)\cdot SL(n)\\ &= \frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}$$

其中b_i $(i=2,\ 3,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数.

于是完成了定理的证明.

6.3 关于Smarandache 对偶函数

我们定义Smarandache 对偶函数$S^*(n)$ 为最大的正整数m 使得$m!\mid n$, 其中n 为任意的正整数, 也就是

$$S^*(n)=\max\{m:\ m!\mid n\ ,\ m\in N\}.$$

关于这个问题, 不少作者作过研究, 并且得到了一些有意义的结论. 例如, 在文献[26] 中, J.Sandor 做了这样一个猜想, 即提出了对正整数k 和在$2k+1$ 之后的第一个素数q 有:

$$S^*\left((2k-1)!(2k+1)!\right)=q-1,$$

后来这个命题被乐茂华[68]所证实.

在文献[69]中, 李洁研究了一个包含$S^*(n)$ 的无穷级数的敛散性, 并获得了一个恒等式. 即就是对任意的实数$\alpha\leq 1$, 无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^\alpha}$ 是发散的, 当$\alpha>1$ 时是收敛的. 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^\alpha}=\zeta(\alpha)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^\alpha},$$

其中$\zeta(\alpha)$ 是Riemann zeta -函数.

现在我们定义另一种双阶乘函数$S^{**}(n)$ 如下:

$$S^{**}(n)=\begin{cases}\max\{2m-1:\ (2m-1)!!\mid n\ ,\ m\in N\},\ 2\dagger n;\\ \max\{2m:\ (2m)!!\mid n\ ,\ m\in N\},2\mid n.\end{cases}$$

我们发现这个函数与$S^*(n)$ 有着非常相似的性质. 在这篇文章中, 我们的主要目的就是想说明这一点, 即就是利用初等方法研究$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$ 的收敛性质, 并给出一个有趣的恒等式. 具体地说也就是证明下面的:

定理6.2 对于任意实数$s>1$, 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$$

是收敛的, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)+\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s},$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta-函数.

由上面的定理我们立刻获得下面的:

推论6.1 当$s=2$, 4 时, 我们有恒等式

(i) $$\sum_{\mathtt{n}=1}^{\infty}\frac{\mathtt{S}^{**}(\mathtt{n})}{\mathtt{n}^2}=\frac{\pi^2}{4}\sum_{\mathtt{m}=1}^{\infty}\frac{1}{((2\mathtt{m}+1)!!)^2}+\frac{\pi^2}{3}\sum_{\mathtt{m}=1}^{\infty}\frac{1}{((2\mathtt{m})!!)^2}+\frac{\pi^2}{8}.$$

(ii) $$\sum_{\mathtt{n}=1}^{\infty}\frac{\mathtt{S}^{**}(\mathtt{n})}{\mathtt{n}^4}=\frac{\pi^4}{48}\sum_{\mathtt{m}=1}^{\infty}\frac{1}{((2\mathtt{m}+1)!!)^4}+\frac{\pi^4}{45}\sum_{\mathtt{m}=1}^{\infty}\frac{1}{((2\mathtt{m})!!)^4}+\frac{\pi^4}{96}.$$

定理的证明 在这一部分, 我们来完成定理的证明.

首先如果$s>1$, 由$S^{**}(n)<<\ln n$ 可得狄利克雷级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$ 是收敛的, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}=\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}+\sum_{\substack{n=1\\2|n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}.$$

由$S^{**}(n)$ 的定义知当n 为奇数时, 如果$S^{**}(n)=2m-1$, 则$(2m-1)!!\mid n$. 我们令$n=(2m-1)!!\cdot n_1$ 且$(2m+1)\dagger n_1$. 那么对于任意实数$s>1$, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n\\S^{**}(n)=2m-1}}^{\infty}\frac{2m-1}{n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n\\(2m+1)\dagger n}}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s\cdot n^s}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s}\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n\\(2m+1)\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s}\right)\left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^s\cdot n^s}\right)\\
&= \left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m-1)!!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m+1)!!)^s}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m+1}{((2m+1)!!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{((2m+1)!!)^s}\right)\\
&= \left(\sum_{\substack{n=1\\2\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)\\
&= \zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right). \qquad (6\text{-}8)
\end{aligned}
$$

当n 为偶数时, 如果$S^{**}(n)=2m$, 则$(2m)!!\mid n$. 现在我们令$n=(2m)!!\cdot n_2$ 且$(2m+2)\dagger n_2$. 那么对于任意实数$s>1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=1\\2|n}}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\2|n\\S^{**}(n)=2m}}^{\infty}\frac{2m}{n^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\(2m+2)\dagger n}}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s\cdot n^s}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s}\sum_{\substack{n=1\\(2m+2)\dagger n}}^{\infty}\frac{1}{n^s}\\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+2)^s\cdot n^s}\right)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m)!!)^s}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{((2m+2)!!)^s}\right)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+2)!!)^s}\right)\\
&= \zeta(s)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+2)!!)^s}\right)\\
&= \zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s}. \qquad (6\text{-}9)
\end{aligned}
$$

结合(6-8) 式和(6-9) 式立刻得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s} &= \sum_{\substack{n=1\\2\nmid n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}+\sum_{\substack{n=1\\2\mid n}}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}\\ &= \zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)+\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s}.\end{aligned}$$

于是就完成了定理的证明.

当$s=2$, 4 时, 注意到$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ (见参考文献[13]) 我们容易算出下面的式子:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^2} &= \zeta(2)\cdot\frac{3}{4}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^2}\right)+\zeta(2)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{8}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^2}\right)+\frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^2}+\frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^2}+\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^4}+\frac{\pi^4}{45}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^4}+\frac{\pi^4}{96}.$$

6.4 一个新的算术函数及其均值

对任意正整数n, 我们定义算术函数$\overline{\Omega}(n)$ 为$\overline{\Omega}(1)=0$, 当$n>1$ 且$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$ 为n 的标准分解式时, 定义$\overline{\Omega}(n)=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\cdots\alpha_kp_k$. 例如$\overline{\Omega}(2)=2$, $\overline{\Omega}(3)=3$, $\overline{\Omega}(4)=4$, $\overline{\Omega}(5)=5$, $\overline{\Omega}(6)=5$, $\overline{\Omega}(7)=7$, $\overline{\Omega}(8)=6$, $\overline{\Omega}(9)=6$, $\overline{\Omega}(10)=7$, $\cdots\cdots$. 显然这个函数与n 的素因子个数(包括重数在内) 函数$\Omega(n)$ 密切相关, 而且它也是一个完全可加函数! 事实上对任意正整数m 及n, 显然由$\overline{\Omega}(n)$ 的定义可知:

$$\overline{\Omega}(m\cdot n)=\overline{\Omega}(m)+\overline{\Omega}(n).$$

关于这个函数的性质, 至今似乎没有人研究, 至少在现有的文献中我们还没有看到有关结论. 然而, 作者认为研究这个函数是有意义的, 它不仅可以刻划正整数标准分解式中所包含素数与其指数的一种加权性质, 而且也是函数$\Omega(n)$ 的进一步推广和延伸! 基于这些原因, 本文主要研究了函数$\overline{\Omega}(n)$ 的均值性质, 并给出了一个较强的均值公及有趣的恒等式. 具体地说, 我们证明了下面的两个结论:

定理6.3 设k 为给定的正整数. 则对任意实数$x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\overline{\Omega}(n) = x^2\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中c_i $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数且$c_1 = \frac{\pi^2}{12}$.

定理6.4 对任意复数$s > 2$, 我们有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\Omega}(n)}{n^s} = \zeta(s)\cdot\frac{\displaystyle\sum_p\frac{1}{p^{s-1}}}{1-\displaystyle\sum_p\frac{1}{p^s}},$$

其中$\displaystyle\sum_p$ 表示对所有素数求和, $\zeta(s)$ 为Riemann zeta -函数.

在定理2 中取$s = 4$ 并注意到$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ 我们立刻得到下面的

推论6.2 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\Omega}(n)}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\cdot\frac{\displaystyle\sum_p\frac{1}{p^3}}{1-\displaystyle\sum_p\frac{1}{p^4}}.$$

定理的证明 为了完成定理的证明, 我们需要下面一个简单的:

引理6.4.1 对任意正数$x > 1$, 我们有估计式

$$\sum_{n\leq x}\Omega(n) = x\cdot\ln\ln x + C + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

其中C 为可计算的常数.

证明 这是一个经典结果, 其证明过程可参阅文献[70] 及[71].

现在我们直接给出定理的证明. 首先证明定理6.3. 我们将区间$[1,\ x]$中所有正整数分为两个子集A 和B, 其中A 是$[1,\ x]$ 中所有满足$P(n) > \sqrt{n}$ 的正整数n 的集合, $P(n)$ 表示n 的最大素因子; B 是$[1,\ x]$ 中所有满足$P(n) \leq \sqrt{n}$ 的正整数n 的集合. 显然由A 和B 的定义并注意到$\overline{\Omega}(n) \leq \Omega(n)\cdot P(n)$ 我们立刻得到

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\overline{\Omega}(n) &= \sum_{n\in A}\overline{\Omega}(n)+\sum_{n\in B}\overline{\Omega}(n)\\
&= \sum_{\substack{pn\leq x\\ n<p}}\overline{\Omega}(pn)+O\left(\sum_{n\in B}\Omega(n)\cdot P(n)\right)\\
&= \sum_{\substack{pn\leq x\\ n<p}}\left(p+\overline{\Omega}(n)\right)+O\left(\sum_{n\leq x}\Omega(n)\cdot\sqrt{n}\right)\\
&= \sum_{n\leq\sqrt{x}}\ \sum_{n<p\leq\frac{x}{n}}p+\sum_{n\leq\sqrt{x}}\ \sum_{n<p\leq\frac{x}{n}}\overline{\Omega}(n)+O\left(\sqrt{x}\sum_{n\leq x}\Omega(n)\right)\\
&= \sum_{n\leq\sqrt{x}}\sum_{p\leq\frac{x}{n}}p+\sum_{n\leq\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{n}\right)\overline{\Omega}(n)+O\left(x^{\frac{3}{2}}\ln\ln x\right), \qquad (6\text{-}10)
\end{aligned}$$

其中$\pi(x)$ 表示不超过x 的所有素数的个数.

对任意正整数k, 由文献[67] 中定理3.2 知

$$\pi(x)=x\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right), \qquad (6\text{-}11)$$

其中$a_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数且$a_1=1$.

于是由(6-11)式可得

$$\sum_{n\leq\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{n}\right)\overline{\Omega}(n)\ll\frac{x}{\ln x}\cdot\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{\overline{\Omega}(n)}{n}\ll x^{\frac{3}{2}}. \qquad (6\text{-}12)$$

由(6-11)式及Abel 求和公式(参阅文献[13] 中定理4.2)可得

$$\sum_{p\leq x}p = x\cdot\pi(x)-\int_{\frac{3}{2}}^{x}\pi(y)dy$$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\ln^i x} - \int_{\frac{3}{2}}^{x} \left(y \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\ln^i y} + O\left(\frac{y}{\ln^{k+1} y} \right) \right) dy + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x} \right) \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x} \right), \qquad (6\text{-}13)
\end{aligned}
$$

其中b_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数且$b_1 = 1$.

于是应用(6-13) 式并注意到$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ 可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n \le \sqrt{x}} \sum_{p \le \frac{x}{n}} p &= \sum_{n \le \sqrt{x}} \left[\frac{x^2}{2n^2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{b_i}{\ln^i \frac{x}{n}} + O\left(\frac{x^2}{n^2 \cdot \ln^{k+1} x} \right) \right] \\
&= x^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x} \right), \qquad (6\text{-}14)
\end{aligned}
$$

其中c_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 为可计算的常数且$c_1 = \frac{\pi^2}{12}$.

结合(6-10), (6-11), (6-12)及(6-14) 式立刻得到渐近公式

$$
\sum_{n \le x} \overline{\Omega}(n) = x^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x} \right).
$$

于是完成了定理的证明.

现在我们证明定理6.4.

设$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Omega}(n)}{n^s}$, 注意到$\overline{\Omega}(n) \ll n$, 所以由调和级数的敛散性知当$s > 2$ 时$f(s)$ 绝对收敛且有

$$
\begin{aligned}
f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Omega}(n)}{n^s} = \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Omega}(p \cdot n)}{p^s \cdot n^s} = \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p + \overline{\Omega}(n)}{p^s \cdot n^s} \\
&= \left(\sum_{p} \frac{1}{p^{s-1}} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) + \left(\sum_{p} \frac{1}{p^s} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Omega}(n)}{n^s} \right) \\
&= \zeta(s) \cdot \left(\sum_{p} \frac{1}{p^{s-1}} \right) + f(s) \cdot \left(\sum_{p} \frac{1}{p^s} \right). \qquad (6\text{-}15)
\end{aligned}
$$

将(6-15)式整理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\Omega}(n)}{n^s}=\zeta(s)\cdot\frac{\displaystyle\sum_{p}\frac{1}{p^{s-1}}}{1-\displaystyle\sum_{p}\frac{1}{p^s}},$$

其中$\sum\limits_{p}$ 表示对所有素数求和, $\zeta(s)$ 为Riemann zeta -函数.

于是完成了定理6.4 的证明.

6.5 关于Smarandache素数部分

对任意正整数$n \geq 1$, Smarandache 上素数部分$P_p(n)$ 定义为大于等于n 的最小素数. 例如, $P_p(n)$ 的前几项值为$P_p(1)=2$, $P_p(2)=2$, $P_p(3)=3$, $P_p(4)=5$, $P_p(5)=5$, $P_p(6)=7$, $P_p(7)=7$, $P_P(8)=11$, $P_p(9)=11$, $P_p(10)=11$, $P_p(11)=11$, $P_p(12)=13$, $P_p(13)=13$, $P_p(14)=17$, $P_p(15)=17$, $\cdots$. 对任意的正整数$n \geq 2$, 我们还定义Smarandache 下素数部分$p_p(n)$ 为小于等于n 的最大素数. 它的前几项值为$p_p(2)=2$, $p_p(3)=3$, $p_p(4)=3$, $p_p(5)=5$, $p_p(6)=5$, $p_p(7)=7$, $p_p(8)=7$, $p_p(9)=7$, $p_p(10)=7$, $p_p(11)=11$, $\cdots$. 在"Only problems, Not solutions" (参阅参考文献[1] , 问题39)一书中, F.Smarandache 教授提出让我们研究序列$\{P_p(n)\}$ 和$\{p_p(n)\}$ 的性质. 关于这个问题, 好像还没有人研究过, 至少我们以前没有见到相关的结果. 但这个问题非常的重要也是很有意义的, 因为在Smarandache 下素数部分和上素数部分分布问题上它们有非常接近的关系. 现在我们定义

$$I_n=\{p_p(2)+p_p(3)+\cdots+p_p(n)\}/n$$

和

$$I_n=\{P_p(2)+P_p(3)+\cdots+P_p(n)\}/n.$$

在参考文献[14] 的问题10 中, Kenichiro Kashihara 让我们估计:

(A). 是否$\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-I_n)$ 收敛或者发散. 如果收敛, 找出其极限值.

(B). 是否$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{I_n}$ 收敛或者发散. 如果收敛, 找出其极限值.

关于问题(A), 我们暂时没有得到什么结果. 但关于问题(B), 我们得到了彻底的解决. 事实上我们得到了一个非常好的结果.

这篇文章中, 我们研究了$\frac{S_n}{I_n}$ 的渐进性质, 并且给出了一个很好的渐进公式. 即就是, 我们证明了如下的结论:

定理6.5 对任意的正整数$n > 1$, 我们有渐近公式

$$\frac{S_n}{I_n} = 1 + O\left(n^{-\frac{1}{3}}\right).$$

从这个定理我们还可得到如下的:

推论6.3 当$n \longrightarrow \infty$ 时极限S_n/I_n 收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{I_n} = 1.$$

这样我们解决了参考文献[14] 的问题B.

几个引理 为了完成定理的证明, 我们需要如下的几个引理. 首先我们有:

引理6.5.1 对任意的实数$x > 1$, 我们有渐进公式

$$\sum_{p_{n+1}\leq x} (p_{n+1} - p_n)^2 \ll x^{\frac{23}{18}+\varepsilon},$$

其中p_n 表示第n 个素数, ε 表示任意正整数.

证明 根据D.R.Heath Brown [72] 和[73] 这是一个非常著名的结论.

引理6.5.2 设x 为足够大的正实数, 那么在x 和$x + x^{\frac{2}{3}}$ 之间一定存在一个素数P.

证明 对任意足够大的实数x, 设P_n 表示最大的素数且$P_n \leq x$. 那么从引理6.5.1 我们立即推导出

$$(P_n - P_{n-1})^2 \ll x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}$$

或者

$$P_n - P_{n-1} \ll x^{\frac{2}{3}}.$$

所以一定存在一个素数P 介于x 和$x + x^{\frac{2}{3}}$ 之间. 这样便证明了引理6.5.2.

引理6.5.3 对任意实数$x > 1$, 我们有渐进公式

$$\sum_{n \le x} P_p(n) = \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\right)$$

和

$$\sum_{n \le x} p_p(n) = \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\right).$$

证明 我们仅证明第一个渐近公式, 相似的我们可以推导出第二个公式. 设P_k 表示第k 个素数. 那么从$P_p(n)$ 的定义我们知道对任意固定的素数P_r, 一定存在$P_{r+1} - P_r$, 正整数n 使得$P_p(n) = P_r$. 于是我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{n \le x} P_p(n) &= \sum_{P_{n+1} \le x} P_n \cdot (P_{n+1} - P_n) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{P_{n+1} \le x} \left(P_{n+1}^2 - P_n^2\right) - \frac{1}{2} \sum_{P_{n+1} \le x} (P_{n+1} - P_n)^2 \\
&= \frac{1}{2}P^2(x) - 2 - \frac{1}{2} \sum_{P_{n+1} \le x} (P_{n+1} - P_n)^2, \qquad (6\text{-}16)
\end{aligned}$$

其中$P(x)$ 表示最大的素数使得$P(x) \le x$.

从引理6.5.2 我们知道

$$P(x) = x + O\left(x^{\frac{2}{3}}\right). \qquad (6\text{-}17)$$

现在从(6-16), (6-17) 和引理1 我们立即可推导出

$$\sum_{n \le x} P_p(n) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\right) + O\left(x^{\frac{23}{18}+\varepsilon}\right) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + O\left(x^{\frac{5}{3}}\right).$$

这样我们便证明了引理6.5.3 的第一个渐渐公式.

第二个渐进公式由引理6.5.1, 引理6.5.2 和等式

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} p_p(n) &= \sum_{P_n\le x} P_n\cdot(P_n-P_{n-1})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{P_n\le x}\left(P_n^2-P_{n-1}^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{p_n\le x}(P_n-P_{n-1})^2\\ &= \frac{1}{2}P^2(x)+\frac{1}{2}\sum_{P_n\le x}(P_n-P_{n-1})^2\end{aligned}$$

即可得到.

定理的证明 这一部分, 我们直接完成定理的证明. 事实上对任意的正整数$n>1$, 从引理6.5.3 以及I_n 和S_n 的定义我们有

$$\begin{aligned}I_n &= \{p_p(2)+p_p(3)+\cdots+p_p(n)\}/n\\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}n^2+O\left(n^{\frac{5}{3}}\right)\right]=\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)\end{aligned}\tag{6-18}$$

和

$$\begin{aligned}S_n &= \{P_p(2)+P_p(3)+\cdots+P_p(n)\}/n\\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}n^2+O\left(n^{\frac{5}{3}}\right)\right]=\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{2}{3}}\right).\end{aligned}\tag{6-19}$$

结合(6-18) 和(6-19) 我们有

$$\frac{S_n}{I_n}=\frac{\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)}{\frac{1}{2}n+O\left(n^{\frac{2}{3}}\right)}=1+O\left(n^{\frac{-1}{3}}\right).$$

这样即证明了我们的定理.

当$n\longrightarrow\infty$ 时由定理我们便可得到推论.

6.6 一个丢番图方程及其它的整数解

众所周知, 丢番图方程(或称不定方程)的求解问题在初等数论及代数数论研究中占有十分重要的地位, 从而引起了不少学者的重视和兴趣, 所以取得了丰硕的成果, 例如费尔马问题的解决就是一个典型的例证!

然而由于不定方程的形式多样, 因而使得这方面仍然存在许多未解决的问题! 例如在文献[14]中, Kenichiro Kashihara 建议我们研究不定方程

$$x^y + y^z + z^x = 0 \tag{6-20}$$

的可解性, 并求该方程的所有整数解! 同时, Kenichiro Kashihara 也在[14]中评论道: 注意到方程(6-20) 中x, y 及z 的循环形式, 因此求方程(6-20)的一般解是一个很难的问题! 然而通过各个方面考察, 我们发现获得方程(6-20)的一般解并非像[14] 中所想象的那样难! 本文的主要目的是利用初等方法及整数的整除性质研究这一问题, 并获得彻底解决. 即就是证明下面的:

定理6.6 *方程$x^y + y^z + z^x = 0$有且仅有三组整数解, 它们分别是*

$$(x,\ y,\ z) = (-2,\ 1,\ 1),\ (1,\ -2,\ 1),\ (1,\ 1,\ -2).$$

显然我们的定理给出了文献[14]中所提出问题的一个完整回答! 对于方程(6-20)的一般形式, 也就是n个变量的方程:

$$x_1^{x_2} + x_2^{x_3} + \cdots + x_{n-1}^{x_n} + x_n^{x_1} = 0$$

的可解性以及它的一般整数解是一个有待于进一步研究的问题!

定理的证明 这节我们利用初等方法以及整数的整除性给出定理的直接证明. 为叙述方便我们分为下面几种情况进行证明:

(a). 如果方程(6-20)有整数解$(x,\ y,\ z)$, 那么$x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. 事实上如果x, y, z 均为零, 或者x, y, z 中有两个为零, 或者x, y, z 中一个为零, 则注意到$0^0 = 1$, 0^{-1} 无意义, 容易验证x, y, z 不满足方程(6-20).

(b). 若x, y, z 均为偶数, 则$(x,\ y,\ z)$ 不可能满足方程(1). 这是因为如果x, y, z 均为偶数且满足方程(6-20), 则由(a)知x, y 及z 均为非零偶数，所以$x^y + y^z + z^x$ 中每一项都为正数, 从而$x^y + y^z + z^x > 0$, 与x, y, z 满足方程(6-20). 矛盾!

(c). 若$(x,\ y,\ z)$ 满足方程(6-20), 则x, y, z 中不可能有两个偶数. 事实上如果$(x,\ y,\ z)$ 满足方程(6-20)且x, y, z 中恰好有两个偶数, 注意

到(a)不妨设x, y 为非零偶数，z 为非零奇数. 这时显然x, y 和z 不可能都是正整数，否则$x^y+y^z+z^x>0$, 与x, y, z 满足方程(6-20)矛盾! 若x, y 和z 都是负整数, 则方程(6-20)变为

$$\frac{1}{|x|^{|y|}}-\frac{1}{|y|^{|z|}}+\frac{1}{|z|^{|x|}}=0$$

或者

$$|y|^{|z|}\cdot|z|^{|x|}+|x|^{|y|}\cdot|y|^{|z|}=|x|^{|y|}\cdot|z|^{|x|}.$$

此时记$|x|=2^{s_1}\cdot t_1$, $|y|=2^{s_2}\cdot t_2$, $M=|z|^{|x|}$, 其中$s_i\geq 1$, $2\dagger t_i$, $i=1,2$. M 为奇数. 于是上式化为:

$$(2^{s_2}\cdot t_2)^{|z|}\cdot M+(2^{s_1}\cdot t_1)^{2^{s_2}\cdot t_2}\cdot(2^{s_2}\cdot t_2)^{|z|}=(2^{s_1}\cdot t_1)^{2^{s_2}\cdot t_2}\cdot M.$$

由此及整数的整除性质立刻推出

$$2^{s_1\cdot 2^{s_2}\cdot t_2}=2^{s_2\cdot|z|}.$$

因此$s_1\cdot 2^{s_2}\cdot t_2=s_2\cdot|z|$. 由于$|z|$ 为奇数, 故由等式可得$2^{s_2}\mid s_2$, 这不可能! 因此x, y 和z 不可能都是负整数. 如果x, y, z 中两个正数, 一个负数, 则不妨设$x>0$, $y>0$, $z<0$ 或者$x>0$, $y<0$, $z>0$. 若是前者, 则方程(6-20)变为

$$x^y+\frac{1}{y^{|z|}}+|z|^x=0.$$

此式显然是不可能的, 因为它的每一项都是正数! 如果$x>0$, $y<0$, $z>0$. 则方程(6-20)变为

$$\frac{1}{x^{|y|}}-|y|^z+z^x=0$$

或者

$$1=x^{|y|}\cdot|y|^z-x^{|y|}\cdot z^x.$$

此式左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾! 同理当$x<0$, $y>0$, $z>0$ 时注意到:

$$|x|^y+y^z+\frac{1}{z^{|x|}}>0,$$

所以方程(6-20)不可能成立!

如果x, y, z 中一个正数, 两个负数, 不妨设$x>0$, $y<0$, $z<0$. 此时方程(6-20)成为

$$\frac{1}{x^{|y|}}-\frac{1}{|y|^{|z|}}+|z|^{x}>0$$

或者

$$|y|^{|z|}-x^{|y|}+|y|^{|z|}\cdot x^{|y|}\cdot|z|^{x}=0.$$

由上式立刻推出$|y|^{|z|}$ 整除$x^{|y|}$ 及$x^{|y|}$ 整除$|y|^{|z|}$. 所以$x^{|y|}=|y|^{|z|}$，$|y|^{|z|}\cdot x^{|y|}\cdot|z|^{x}=0$ 矛盾! 如果$x<0$, $y>0$, $z<0$. 此时注意到x, y 为非零偶数, z 为非零奇数, 所以

$$|x|^{y}+\frac{1}{y^{|z|}}+\frac{1}{|z|^{|x|}}>0,$$

从而方程(6-20) 不可能成立.

如果$x<0$, $y<0$, $z>0$, 此时方程(6-20)成为

$$\frac{1}{|x|^{|y|}}-|y|^{z}+\frac{1}{|z|^{|x|}}=0$$

或者

$$|z|^{|x|}+|x|^{|y|}=|y|^{z}\cdot|z|^{|x|}\cdot|x|^{|y|}.$$

上式左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾!

所以$(x,\ y,\ z)$ 满足方程(6-20)时, x, y, z 中不可能有两个偶数.

(d). 若$(x,\ y,\ z)$ 满足方程(6-20), 则x, y, z 不可能都是奇数. 事实上若$(x,\ y,\ z)$ 满足方程(6-20)且x, y, z 都是奇数, 则当x, y 和z 都是负数时$x^{y}+y^{z}+z^{x}<0$ 矛盾；当x, y 和z 都是正数时$x^{y}+y^{z}+z^{x}>0$ 矛盾; 若x, y, z 中恰好有两个正数设为x 及y, z 为负数，则方程(6-20) 变为$y^{|z|}\cdot x^{y}+1=|z|^{x}\cdot y^{|z|}$. 此式左边为偶数, 右边为奇数矛盾; 若$x$ 及z 为正数, y 为负数, 则方程(6-20)变为

$$\frac{1}{x^{|y|}}-|y|^{z}+z^{x}=0$$

或者

$$1=x^{|y|}\cdot|y|^{z}-z^{x}\cdot x^{|y|}.$$

上式中左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾!

若y 及z 为正数, x为负数, 则方程(6-20)变为

$$-|x|^y + y^z + \frac{1}{z^{|x|}} = 0$$

或者

$$1 = |x|^y \cdot z^{|x|} - z^{|x|} \cdot y^z.$$

上式中左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾!

若x, y, z 中恰好有一个正数设为x, 而y 及z 为负数, 则方程(6-20)变为

$$|z|^x \cdot |y|^{|z|} \cdot x^{|y|} = |y|^{|z|} - x^{|y|}.$$

上式中左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾!

设y 为正数, 而x 及z为负数, 则方程(6-20)变为

$$|z|^{|x|} \cdot y^{|z|} \cdot |x|^y = |z|^{|x|} - y^{|z|}.$$

上式中左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾!

设z 为正数, 而x 及y 为负数, 则方程(6-20)变为

$$z^{|x|} \cdot |y|^z \cdot |x|^{|y|} = |x|^{|y|} - z^{|x|}.$$

上式中左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾!

所以当$(x,\ y,\ z)$ 满足方程(6-20)时, x, y 及z 不可能都是奇数.

(e). 综合以上分析, 我们立刻推出当$(x,\ y,\ z)$ 满足方程(6-20)时, x, y 及z 中一个偶数, 两个奇数. 不失一般性假定x 为偶数，y 及z 为奇数. 显然x, y 及z 不可能全为正数, 否则$x^y + y^z + z^x > 0$. 当然x, y 及z 也不可能全为负数, 否则方程(6-20)成为

$$|x|^{|y|} \cdot |y|^{|z|} = |y|^{|z|} \cdot |z|^{|x|} + |z|^{|x|} \cdot |x|^{|y|}.$$

上式中左边为偶数, 右边为奇数, 矛盾!

现在我们证明当$(x,\ y,\ z)$ 满足方程(6-20)时, x, y 及z 中不可能有两个负数. 若不然当x 为正, y 及z为负数时, 方程(6-20)变为

$$|z|^x \cdot |y|^{|z|} \cdot x^{|y|} = x^{|y|} \cdot |z|^x - |z|^x \cdot |y|^{|z|}.$$

上式中左边为偶数, 右边为奇数, 矛盾!

当y 为正, x 及z 为负数时, 方程(6-20) 变为

$$|x|^y \cdot y^{|z|} \cdot |z|^{|x|} = |z|^{|x|} + y^{|z|}.$$

注意到x 为偶数, 所以显然上式左边大于右边, 矛盾！

当z 为正, x 及y 为负数时, 方程(6-20) 变为

$$|x|^{|y|} \cdot |y|^z \cdot z^{|x|} + z^{|x|} = |x|^{|y|}.$$

上式中左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾!

所以当$(x,\ y,\ z)$ 满足方程(6-20) 时, x, y 及z 中不可能有两个负数. 因此x, y 及z 当$x < 0$, $y > 0$, $z > 0$ 时，方程(6-20) 成为

$$y^z \cdot z^{|x|} + 1 = |x|^y \cdot z^{|x|}.$$

由上式立刻推出$z^{|x|} = 1$, $z = 1$, $y + 1 = |x|^y$. 注意到$x < 0$ 且为偶数, 所以$y + 1 = |x|^y$ 成立当且仅当$x = -2$, $y = 1$. 此时$(x,\ y,\ z) = (-2,\ 1,\ 1)$ 是方程(6-20) 的一组解.

当$x > 0$, $y < 0$, $z > 0$ 时, 方程(6-20) 成为

$$1 = x^{|y|} \cdot (|y|^z - z^x).$$

上式中左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾!

当$x > 0$, $y > 0$, $z < 0$ 时, 注意到x 为偶数, 所以方程(6-20) 成为

$$x^y + \frac{1}{y^{|z|}} + |z|^x = 0.$$

上式左边大于零, 显然是不可能的!

综合以上讨论, 并注意到x, y 及z 的对称性我们立刻得到方程(6-20) 有且仅有三组解, 它们分别是

$$(x,\ y,\ z) = (-2,\ 1,\ 1),\ (1,\ -2,\ 1),\ (1,\ 1,\ -2).$$

于是完成了定理的证明.

6.7 一个新的算术函数及其均值分布

设$k \geq 0$ 为任意给定的实数. 对任意正整数$n > 1$, 当n 的标准分解式为$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_s^{\alpha_s}$ 时, 我们定义算术函数$\Omega(k,n)$ 为: $\Omega(k,1) = 0$, $\Omega(k,n) = \alpha_1 p_1^k + \alpha_2 p_2^k + \cdots + \alpha_s p_s^k$. 例如$\Omega(1,2) = 2$，$\Omega(1,3) = 3$, $\Omega(1,4) = 4$, $\Omega(1,5) = 5$, $\Omega(1,6) = 5$，$\Omega(1,7) = 7$, $\Omega(1,8) = 6$, $\Omega(1,9) = 6$，$\Omega(1,10) = 7, \cdots$. 显然这个函数也是一个加性算术函数, 即就是对任意正整数m 及n 有:

$$\Omega(k,mn) = \Omega(k,m) + \Omega(k,n). \tag{6-21}$$

容易验证函数$\Omega(k,n)$ 也满足:

$$\sum_{d|n} \Omega(k,d) = \frac{1}{2} \cdot d(n) \cdot \Omega(k,n),$$

其中$d(n)$ 表示Dirichlet 除数函数, $\sum\limits_{d|n}$ 表示对n 的所有正因子求和.

特别当$k = 0$ 时, 函数$\Omega(0,n)$ 就是经典的算术函数$\Omega(n)$: n 的所有素因数的个数, 包括重数在内. 因此我们可以认为函数$\Omega(k,n)$ 是$\Omega(n)$ 的推广和延伸! 关于函数$\Omega(n)$ 的性质, 在初等数论教科书中已有不少结果, 例如文献[56] 及[71] 中证明了对任意实数$x > 1$, 有渐近公式:

$$\sum_{n \leq x} \Omega(n) = x \cdot \ln\ln x + C \cdot x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

其中C为常数.

本文的主要目的是研究函数$\Omega(k,n)$ 的均值分布性质, 并给出一个较强的均值分布定理. 具体的说也就是证明下面的:

定理6.7 设$k > 0$ 是一个给定的实数. 那么对任意实数$x \geq 3$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} \left(\Omega(k,n) - P^k(n)\right)^2 = \zeta(2k+1) \cdot \frac{4}{k} \cdot \frac{x^{k+1}}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right),$$

其中$P(n)$ 表示n 的最大素因子, $\zeta(m)$ 表示Riemann zeta-函数.

注意到$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$, 由我们的定理立刻得到下面的:

推论6.4 对任意实数$x\geq 3$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\left[\Omega\left(\frac{1}{2},n\right)-\sqrt{P(n)}\right]^2=\frac{4\pi^2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^3 x}\right).$$

定理的证明 这节我们直接给出定理的证明. 首先我们将区间[1, x]中的所有正整数n 分为三个子集合: A, B 及C. A 表示所有满足$n\in[1,x]$且$P(n)>\sqrt{n}$ 的n 的集合; B 表示所有满足$n\in[1,x]$ 且$n^{\frac{1}{3}}<P(n)\leq\sqrt{n}$ 的n 的集合; C 表示所有满足$n\in[1,x]$且$P(n)\leq n^{\frac{1}{3}}$ 的n 的集合. 由A, B 及C 的定义显然有

$$\sum_{n\leq x}\left(\Omega(k,n)-P^k(n)\right)^2=\sum_{n\in A}\left(\Omega(k,n)-P^k(n)\right)^2+$$
$$+\sum_{n\in B}\left(\Omega(k,n)-P^k(n)\right)^2+\sum_{n\in C}\left(\Omega(k,n)-P^k(n)\right)^2 \tag{6-22}$$

现在我们分别估计(6-22) 式右边的三个和式. 当$n\in A$ 时, 由于$P(n)>\sqrt{n}$, 所以n 的标准分解式中最大素因子次数为1, 不妨可设$n=m\cdot P(n)$, $m<P(n)$. 注意到$\Omega(k,n)\leq n^k\cdot\ln n$ 以及当$P(n)\leq\sqrt{n}$时, $\Omega(k,n)\leq n^{\frac{1}{2}}\cdot\ln n$, 于是我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in A}\left(\Omega(k,n)-P^k(n)\right)^2=\sum_{\substack{mp\leq x\\ m<p}}\left(\Omega(k,mp)-p^k\right)^2\\
=&\sum_{\substack{mp\leq x\\ m<p}}\Omega^2(k,m)=\sum_{m\leq\sqrt{x}}\sum_{m<p\leq\frac{x}{m}}\Omega^2(k,m)\\
=&\sum_{\substack{m\leq\sqrt{x}\\ P(m)>\sqrt{m}}}\sum_{m<p\leq\frac{x}{m}}\Omega^2(k,m)+\sum_{\substack{m\leq\sqrt{x}\\ P(m)\leq\sqrt{m}}}\sum_{m<p\leq\frac{x}{m}}\Omega^2(k,m)\\
=&\sum_{\substack{mp_1\leq\sqrt{x}\\ p_1>m}}\sum_{mp_1<p\leq\frac{x}{mp_1}}\Omega^2(k,mp_1)+O\left(\sum_{m\leq\sqrt{x}}\sum_{p\leq\frac{x}{m}}m^k\cdot\ln^2 m\right)\\
=&\sum_{m\leq x^{\frac{1}{4}}}\sum_{m<p_1\leq\frac{\sqrt{x}}{m}}\sum_{mp_1<p\leq\frac{x}{mp_1}}\left(\Omega(k,m)+\Omega(k,p_1)\right)^2+O\left(x^{\frac{k+2}{2}}\cdot\ln x\right)\\
=&\sum_{m\leq x^{\frac{1}{4}}}\sum_{m<p_1\leq\frac{\sqrt{x}}{m}}\sum_{mp_1<p\leq\frac{x}{mp_1}}\left(\Omega^2(k,m)+2\cdot p_1^k\cdot\Omega(k,m)+p_1^{2k}\right)
\end{aligned}$$

$$+ \quad O\left(x^{\frac{k+2}{2}} \cdot \ln x\right). \tag{6-23}$$

下面我们估计(6-23) 式中的主项. 应用Abel 求和公式及素数定理(参阅文献[13] 中定理4.2 及文献[67] 中定理3.2)

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 = \frac{x}{\ln x} + O\left(\frac{x}{\ln 2x}\right)$$

我们可得:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m \le x^{\frac{1}{4}}} \sum_{m < p_1 \le \frac{\sqrt{x}}{m}} \sum_{mp_1 < p \le \frac{x}{mp_1}} p_1^{2k} \\
= & \sum_{m \le x^{\frac{1}{4}}} \sum_{m < p_1 \le \frac{\sqrt{x}}{m}} p_1^{2k} \cdot \left[\frac{x}{mp_1 \cdot \ln \frac{x}{mp_1}} + O\left(\frac{x}{mp_1 \cdot \ln^2 x}\right)\right] \\
= & x \cdot \sum_{m \le x^{\frac{1}{4}}} \sum_{p_1 \le \frac{\sqrt{x}}{m}} \frac{p_1^{2k-1}}{m \cdot \ln \frac{x}{mp_1}} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right) \\
= & \frac{x^{k+1}}{\ln^2 x} \cdot \sum_{m \le x^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{m^{2k+1}} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right) \\
= & \zeta(2k+1) \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{x^{k+1}}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right),
\end{aligned} \tag{6-24}$$

其中$\zeta(m)$ 为Riemann zeta-函数.

同理容易推出估计式

$$\sum_{m \le x^{\frac{1}{4}}} \sum_{m < p_1 \le \frac{\sqrt{x}}{m}} \sum_{mp_1 < p \le \frac{x}{mp_1}} \Omega^2(k, m) = O\left(x^{\frac{k+2}{2}} \cdot \ln x\right) \tag{6-25}$$

及

$$\sum_{m \le x^{\frac{1}{4}}} \sum_{m < p_1 \le \frac{\sqrt{x}}{m}} \sum_{mp_1 < p \le \frac{x}{mp_1}} p_1^k \cdot \Omega(k, m) = O\left(x^{\frac{k+2}{2}} \cdot \ln x\right). \tag{6-26}$$

于是结合(6-23), (6-24), (6-25) 及(6-26) 式可得

$$\sum_{n \in A} \left(\Omega(k, n) - P^k(n)\right)^2 = \zeta(2k+1) \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{x^{k+1}}{\ln^2 x} + O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right). \tag{6-27}$$

当$n\in C$时, 由于$P(n)<n^{\frac{1}{3}}$, 所以我们有平凡估计式

$$\sum_{n\in C}\left(\Omega(k,n)-P^k(n)\right)^2\ll\sum_{n\le x}n^{\frac{2k}{3}}\ll x^{\frac{2k}{3}+1}\ll\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}. \qquad (6\text{-}28)$$

当$n\in B$ 时, 显然n 包含的比较大的素因子有两种情况: $n=m\cdot p^2$, $m<p$; $n=m\cdot p_1\cdot p_2$, $m<p_1<p_2$. 于是我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in B}\left(\Omega(k,n)-P^k(n)\right)^2\\ =&\sum_{\substack{m\cdot p^2\le x\\ m<p}}\left(\Omega(k,mp^2)-p^k\right)^2+\sum_{\substack{m\cdot p_1\cdot p_2\le x\\ m<p_1<p_2}}\left(\Omega(k,mp_1p_2)-p_2^k\right)^2\\ =&\sum_{\substack{m\cdot p^2\le x\\ m<p}}\left(\Omega(k,m)+p^k\right)^2+\sum_{\substack{m\cdot p_1\cdot p_2\le x\\ m<p_1<p_2}}\left(\Omega(k,m)+p_1^k\right)^2. \qquad (6\text{-}29)\end{aligned}$$

容易得到(6-29) 式右边第一个和式

$$\sum_{\substack{m\cdot p^2\le x\\ m<p}}\left(\Omega(k,m)+p^k\right)^2\ll\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{p\le\sqrt{\frac{x}{m}}}p^{2k}\ll\frac{x^{k+\frac{1}{2}}}{\ln x}\ll\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}. \qquad (6\text{-}30)$$

而(6-29) 式右边第二个和式可分为

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{m\cdot p_1\cdot p_2\le x\\ m<p_1<p_2}}\left(\Omega(k,m)+p_1^k\right)^2\\ =&\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p_1\le\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1m}}\left(\Omega^2(k,m)+2\cdot p_1^k\cdot\Omega(k,m)+p_1^{2k}\right) \qquad (6\text{-}31)\end{aligned}$$

容易得到平凡估计

$$\begin{aligned}&\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p_1\le\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1m}}\Omega^2(k,m)\\ \ll&\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p_1\le\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1m}}m^{2k}\\ \ll&\frac{x^{\frac{2k+3}{3}}\cdot\ln\ln x}{\ln x}\ll\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}. \qquad (6\text{-}32)\end{aligned}$$

及

$$\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p_1\le\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1m}}p_1^k\cdot\Omega(k,m)$$

$$\ll\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p_1\le\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1m}}p_1^k\cdot m^k\ll\frac{x^{\frac{5k+6}{6}}}{\ln^2 x}\ll\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}. \tag{6-33}$$

现在我们估计(6-31) 式中的主项. 与(6-24) 式的计算类似, 应用素数定理及Abel 求和公式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p_1\le\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p_2\le\frac{x}{p_1m}}p_1^{2k}\\
=&\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p_1\le\sqrt{\frac{x}{m}}}p_1^{2k}\left[\frac{x}{mp_1\ln\frac{x}{mp_1}}+O\left(\frac{x}{mp_1\ln^2 x}\right)\right]\\
=&\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p_1\le\sqrt{\frac{x}{m}}}\frac{p_1^{2k-1}\cdot x}{m\ln\frac{x}{mp_1}}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right)\\
=&\zeta(2k+1)\cdot\frac{2}{k}\cdot\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right).\end{aligned} \tag{6-34}$$

由(6-29)-(6-34) 式即可得到

$$\sum_{n\in B}\left(\Omega(k,n)-P^k(n)\right)^2=\zeta(2k+1)\cdot\frac{2}{k}\cdot\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right). \tag{6-35}$$

现在结合(6-22), (6-27), (6-28) 及(6-35) 立刻推出渐近公式:

$$\sum_{n\le x}\left(\Omega(k,n)-P^k(n)\right)^2=\zeta(2k+1)\cdot\frac{4}{k}\cdot\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^3 x}\right),$$

其中$\zeta(n)$ 为Riemann zeta-函数.

于是完成了定理的证明.

6.8 关于Smarandache素数可加补数列

对任意正整数n, 著名的Smarandache 素数可加补函数$SPAC(n)$ 定义为最小的非负整数k 使得$n+k$ 为素数. 例如$SPAC(1)=$

1, $SPAC(2) = 0$, $SPAC(3) = 0$, $SPAC(4) = 1$, $SPAC(5) = 0$, $SPAC(6) = 1$, $SPAC(7) = 0$, $SPAC(8) = 3$, $SPAC(9) = 2$, $\cdots$. 在文献[1] 中, 美籍罗马尼亚著名数论专家, F.Smarandache 教授建议我们研究数列$\{SPAC(n)\}$ 的性质. 令:

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} SPAC(a). \tag{6-36}$$

在文献[14]中，Kenichiro Kashihara 建议我们研究极限

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} SPAC(a). \tag{6-37}$$

的敛散性，同时他猜测数列$\{A_n\}$ 是发散的!

关于这一问题, 至今似乎没有人研究, 甚至还不知道(6-37) 式的极限是否存在. 本文的主要目的是利用初等及解析方法研究数列$\{A_n\}$ 的敛散性, 并解决了文献[14] 中提出的问题!具体地说也就是证明了下面的：

定理6.8 对任意正整数n, 我们有估计式

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} SPAC(a) \geq \frac{1}{2}\ln n + \mathrm{O}\left(1\right).$$

显然由本文的定理立刻推出数列$\{A_n\}$ 是发散的, 从而解决了文献[14] 中的猜测.

两个引理 为了完成定理的证明, 我们需要以下两个简单引理. 首先有

引理6.8.1 设n 为任意正整数, 则当n 较大时在区间$[n, n + n^{\frac{7}{12}}]$ 中一定包含一个素数. 即就是存在素数p 及q 使得

$$n - n^{\frac{7}{12}} \leq p \leq n$$

及

$$n < q \leq n + n^{\frac{7}{12}}.$$

证明: (参阅文献[76] 及[77]).

引理6.8.2 设$\pi(x)$ 表示不超过 x 的所有素数的个数, 则有渐近公式

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

证明: (参阅文献[67]及[11]).

定理的证明 这节我们利用前面的引理来完成定理的证明. 首先对任意充分大的正整数n, 设 $2 = p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_m \leq n$ 表示区间$[1,\ n]$ 中的所有素数. 于是由$SPAC(a)$ 的定义可知在区间$(p_i,\ p_{i+1}]$ 中所有整数a 的补数之和为

$$\begin{aligned}\sum_{p_i<a\leq p_{i+1}} SPAC(a) &= p_{i+1}-p_i-1+p_{i+1}-p_i-2+\cdots+1+0 \\ &= \frac{(p_{i+1}-p_i)(p_{i+1}-p_i-1)}{2}.\end{aligned}$$

注意到$SPAC(1) = 1$, 所以由上式我们可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\leq n} SPAC(a) &= 1+\sum_{p_{i+1}\leq n}\sum_{p_i<a\leq p_{i+1}} SPAC(a)+\sum_{p_m<a\leq n} SPAC(a) \\ &\geq \sum_{p_{i+1}\leq n}\frac{(p_{i+1}-p_i)(p_{i+1}-p_i-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i)^2-\frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i)^2-\frac{1}{2}(p_m-2). \qquad (6\text{-}38)\end{aligned}$$

应用柯西不等式有:

$$p_m-2 = \sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i) \leq \left[\sum_{p_{i+1}\leq n}(p_{i+1}-p_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p_{i+1}\leq n} 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}(\pi(n))^{\frac{1}{2}}.$$

从而可得不等式:

$$\sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i)^2 \ge \frac{(p_m-2)^2}{\pi(n)}.$$

由此及(6-38)式并注意A_n 的定义可得:

$$nA_n \ge \frac{1}{2}\frac{(p_m-2)^2}{\pi(n)} - \frac{1}{2}(p_m-2) = \frac{1}{2}(p_m-2)\left[\frac{p_m-2}{\pi(n)}-1\right]$$

或者

$$A_n \ge \frac{1}{2n}(p_m-2)\left[\frac{p_m-2}{\pi(n)}-1\right].$$

应用引理6.8.1 及引理6.8.2 并注意估计式 $n-p_m \ll n^{\frac{7}{12}}$ 立刻推出：

$$\begin{aligned} A_n &\ge \frac{\left[n+\mathrm{O}\left(n^{\frac{7}{12}}\right)\right]^2}{2n\left[\frac{n}{\ln n}+\mathrm{O}\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right)\right]} + O\left(\frac{p_m}{n}\right) = \frac{n^2+\mathrm{O}\left(n^{\frac{19}{12}}\right)}{\frac{2n^2}{\ln n}+\mathrm{O}\left(\frac{n^2}{\ln^2 n}\right)} + O(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln n + \mathrm{O}(1). \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln n + \mathrm{O}(1)\right] = +\infty,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty.$$

从而A_n是发散的.

于是完成了定理的证明.

6.9 关于 F.Smarandache函数的一个问题

对任意正整数n, 著名的Smarandache 函数$S(n)$ 定义为最小的正整数m 使得$n \mid m!$. 即就是$S(n) = \min\{m :\ m \in N,\ n|m!\}$. 这一函数

是美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache 教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的, 并建议人们研究它的性质! 从$S(n)$ 的定义人们容易推出如果$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示n 的标准分解式, 那么$S(n) = \max_{1\le i\le r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此我们也不难计算出$S(n)$的前几个值为: $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$, $S(4) = 4$, $S(5) = 5$, $S(6) = 3$, $S(7) = 7$, $S(8) = 4$, $S(9) = 6$, $S(10) = 5$, $S(11) = 11$, $S(12) = 4$, $S(13) = 13$, $S(14) = 7$, $S(15) = 5$, $S(16) = 6$, $\cdots\cdots$. 关于$S(n)$的算术性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果! 例如, Lu Yaming 及乐茂华研究了一类包含$S(n)$ 方程的可解性, 证明了该方程有无穷多组正整数解. 即就是证明了对任意正整数$k \ge 2$, 方程

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$$

有无穷多组正整数解$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$.

徐哲峰[5] 获得了有关$S(n)$ 的一个深刻结果! 也就是证明了渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中$P(n)$表示n的最大素因子, $\zeta(s)$ 表示Riemann zeta-函数.

杜凤英[49] 研究了关于Smarandache 函数的一个猜想, 即就是证明了当n 为某些特殊整数(例如n 为无平方因子数)时, 和式

$$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}$$

不可能为整数.

现在我们令$\mathrm{PS}(n)$ 表示区间$[1,\ n]$ 中$S(n)$ 为素数的正整数n 的个数. 在一篇未发表的文献中, J.Castillo建议我们研究极限$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\mathrm{PS}(n)}{n}$的存在问题. 如果存在, 确定其极限. 这一问题是有趣的, 它揭示了Smarandache函数$S(n)$值分布的规律性, 同时也说明在绝大多数情况下, F.Smarandache函数$S(n)$ 取素数值!

然而关于这一问题, 由于不知道从何下手, 所以至今没有人研究, 至少我们没有看到过有关方面的论文. 本文的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决! 具体地说也就是证明了下面的:

定理6.9 对任意正整数$n>1$, 我们有渐近公式

$$\frac{\mathrm{PS}(n)}{n}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

显然这是一个比J.Castillo问题更强的结论.

推论6.5 对任意正整数n, 我们有极限

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\mathrm{PS}(n)}{n}=1$$

定理的证明 这节我们利用初等方法给出定理的直接证明. 首先我们估计$n-\mathrm{PS}(n)$ 的上界. 事实上当$n>1$ 时, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示n 的标准素因数分解式, 那么由函数$S(n)$ 的定义及性质可设$S(n)=S\left(p_i^{\alpha_i}\right)=m\cdot p_i$. 若$\alpha_i=1$, 那么$m=1$ 且$S(n)=p_i$ 为素数. 若$\alpha_i>1$, 那么$m>1$, 则$S(n)$ 为合数. 所以$n-\mathrm{PS}(n)$ 为区间$[1,\ n]$ 中所有$S(n)=1$ 及$S(n)$ 为合数的n 的个数! 显然$S(n)=1$ 当且仅当$n=1$. 于是令$M=\ln n$, 则我们有

$$n-\mathrm{PS}(n)=1+\sum_{\substack{k\leq n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\geq 2}}1\leq 1+\sum_{S(k)\leq M}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 2}}1 \quad (6\text{-}39)$$

现在我们分别估计(6-39)式中的各项, 显然有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{kp^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 2}}1\leq\sum_{\substack{kp^2\leq n\\ 2p>M}}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 3}}1\leq\sum_{\frac{M}{2}<p\leq\sqrt{n}}\ \sum_{k\leq\frac{n}{p^2}}1+\sum_{\substack{p^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 3}}\ \sum_{k\leq\frac{n}{p^\alpha}}1\\
\ll&\sum_{\frac{M}{2}<p\leq\sqrt{n}}\frac{n}{p^2}+\sum_{\substack{p^\alpha\leq n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq 3}}\frac{n}{p^\alpha}\ll\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\leq\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ \alpha\geq p}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\leq\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ 3\leq\alpha<p}}\frac{n}{p^\alpha}\\
\ll&\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\leq\sqrt{n}\\ \alpha>\sqrt{M}}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\leq\sqrt{n}\\ p>\sqrt{M},\ \alpha\geq 3}}\frac{n}{p^\alpha}\\
\ll&\frac{n}{\ln n}+\frac{n}{2^{\sqrt{M}-1}}+\frac{n}{M}\ll\frac{n}{\ln n}
\end{aligned} \quad (6\text{-}40)$$

对于(6-39)式中的另一项, 我们需要采取新的估计方法. 对任意素数$p\leq M$, 令$\alpha(p)=\left[\frac{M}{p-1}\right]$, 即就是$\alpha(p)$ 表示不超过$\frac{M}{p-1}$ 的最大整数.

设$u=\prod_{p\le M} p^{\alpha(p)}$. 对任意满足$S(k)\le M$ 的正整数k, 设$S(k)=S(p^{\alpha})$, 则由$S(k)$ 的定义一定有$p^{\alpha}|M!$, 从而$\alpha\le \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{M}{p^j}\right]\le \frac{M}{p-1}$. 所以所有满足$S(k)\le M$ 的正整数k 一定整除u，而这样k 的个数不会超过u 的正因数的个数, 即就是$d(u)$. 所以我们有

$$\begin{aligned}\sum_{S(k)\le M} 1\le \sum_{d|u} &= \prod_{p\le M}(1+\alpha(p))=\prod_{p\le M}\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\\ &= \exp\left(\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\right)\end{aligned} \tag{6-41}$$

其中$\exp(y)=e^y$.

由素数定理的两种形式(参阅文献[67] 及[11])

$$\pi(M)=\sum_{p\le M}1=\frac{M}{\ln M}+O\left(\frac{M}{\ln^2 M}\right),\quad \sum_{p\le M}\ln p=M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)$$

可得:

$$\begin{aligned}&\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\le \sum_{p\le M}\ln\left(1+\frac{M}{p-1}\right)\\ =&\sum_{p\le M}\left[\ln(p-1+M)-\ln p-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\\ \le&\ \pi(M)\cdot\ln(2M)-\sum_{p\le M}\ln p+\sum_{p\le M}\frac{1}{p}\\ =&\ \frac{M\cdot\ln(2M)}{\ln M}-M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)=O\left(\frac{M}{\ln M}\right)\end{aligned} \tag{6-42}$$

注意到$M=\ln n$, 由(6-41) 及(6-42) 式立刻得到估计式:

$$\sum_{S(k)\le M}1\ll \exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right) \tag{6-43}$$

其中c 是一个正常数.

注意到$\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right) \ll \frac{n}{\ln n}$, 于是结合(6-39), (6-40) 及(6-43) 式立刻推出估计式:

$$n - \mathrm{PS}(n) = 1 + \sum_{\substack{k\leq n \\ S(k)=S(p^{\alpha}),\ \alpha\geq 2}} 1 = O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

所以

$$\mathrm{PS}(n) = n + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

于是完成了定理的证明.

6.10 两个新的算术函数及其均值

对任意正整数n, 我们定义两个新的算术函数$f(n)$及它的对偶函数$\overline{f}(n)$为: $f(1) = \overline{f}(n) = 1$, 当$n > 1$且$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准分解式时定义为: $f(n) = \max(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k)$ 和$\overline{f}(n) = \min(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k)$. 例如$f(1) = 1$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, $f(5) = 1$, $f(6) = 1$, $f(7) = 1$, $f(8) = 3$, $f(9) = 2$, $f(10) = 1$, $\cdots$; $\overline{f}(1) = 1$, $\overline{f}(2) = 1$, $\overline{f}(3) = 1$, $\overline{f}(4) = 2$, $\overline{f}(5) = 1$, $\overline{f}(6) = 1$, $\overline{f}(7) = 1$, $\overline{f}(8) = 3$, $\overline{f}(9) = 2$, $\overline{f}(10) = 1$, $\cdots$. 显然这两个函数是Smarandache可乘函数，即对任意的正整数m, n, 若$(m,\ n) = 1$, 则我们有

$$f(mn) = \max\{f(n),\ f(m)\}$$

$$\overline{f}(mn) = \min\{\overline{f}(m),\ \overline{f}(n)\}$$

关于这两个函数的算术性质, 至今似乎没有人研究, 至少我们现在没有看到过有关文献. 本文的主要目的是利用初等和解析方法研究这两个函数的均值性质，并给出了两个有趣的均值公式. 具体地说，我们证明下面的：

定理6.10 对任意实数$x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(f(n)-1)^2 = bx + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

其中$b = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{\zeta(k+1)}\sum_{p}\frac{p-1}{p^{k+1}-1}$ 为常数, ϵ为任意给定的正数, $\zeta(s)$为Riemann zeta-函数.

定理6.11 对任意实数$x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\left(\overline{f}(n)-1\right)^2=\frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}\cdot x^{\frac{1}{2}}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\ln^2 x\right)$$

几个引理 为了完成定理的证明，我们需要下面三个引理. 首先有

引理6.10.1 设p为一给定的素数，对任意实数$x>1$, 定义函数

$$A(n)=\begin{cases}1, & \text{若}n\text{的素因子的指数不超过}k(k\text{为任意给定的正整数});\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}}A(n)=\frac{p^k(p-1)}{\zeta(k+1)(p^{k+1}-1)}x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

其中ϵ为任意给定的正数.

证明 设$f(s)=\sum\limits_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty}\dfrac{A(n)}{n^s}$, 则由Euler积公式和$A(n)$的定义有

$$\begin{aligned}f(s)&=\prod_{q\neq p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A(q^m)}{q^{ms}}=\prod_{q\neq p}(1+\frac{1}{q^s}+\frac{1}{q^{2s}}+\frac{1}{q^{ks}})\\&=\prod_{q\neq p}\left(\frac{1-\frac{1}{q^{(k+1)s}}}{1-\frac{1}{q^s}}\right)\\&=\frac{\zeta(s)}{\zeta((k+1)s)}\cdot(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{ks}})^{-1}\\&=\frac{\zeta(s)}{\zeta((k+1)s)}\cdot\frac{p^{ks}(p^s-1)}{p^{(k+1)s}-1}\end{aligned}$$

其中$\zeta(s)$为Riemann zeta-函数. 根据Perron公式, 取$s_0=0,\ T=x,\ b=\frac{3}{2}$则可以推出

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}}A(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\frac{\zeta(s)}{\zeta((k+1)s)}\frac{p^{ks}(p^s-1)}{p^{(k+1)s}-1}\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{T}\right)$$

将上式中积分线从$\frac{3}{2}\pm iT$移到$\frac{1}{2}\pm iT$处, 现在来估计主项

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\frac{\zeta(s)}{\zeta((k+1)s)}\frac{p^{ks}(p^s-1)}{p^{(k+1)s}-1}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s$$

这时，函数

$$f(s)=\frac{\zeta(s)}{\zeta((k+1)s)}\frac{p^{ks}(p^s-1)}{p^{(k+1)s}-1}\frac{x^s}{s}$$

在$s=1$处有一个一阶极点，其留数为$\frac{p^k(p-1)x}{\zeta(k+1)(p^{k+1}-1)}$. 所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}+\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT}+\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT}+\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{3}{2}-iT}\right)\frac{\zeta(s)}{\zeta((k+1)s)}\frac{p^{ks}(p^s-1)}{p^{(k+1)s}-1}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\\=&\frac{p^k(p-1)x}{\zeta(k+1)(p^{k+1}-1)}\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\frac{3}{2}+iT}^{\frac{1}{2}+iT}+\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT}+\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{3}{2}-iT}\right)\frac{\zeta(s)}{\zeta((k+1)s)}\frac{p^{ks}(p^s-1)}{p^{(k+1)s}-1}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\ll x^{\frac{1}{2}+\epsilon}$$

那么

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,p)=1}}A(n)=\frac{p^k(p-1)}{\zeta(k+1)(p^{k+1}-1)}x+O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

引理6.10.1得证.

引理6.10.2　设B是所有Square-full 数构成的集合, 则有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\n\in B}}1=\frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}\cdot x^{\frac{1}{2}}+\frac{\zeta(\frac{2}{3})}{\zeta(2)}\cdot x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{6}}\right)$$

其中$\zeta(s)$为Riemann zeta-函数.

证明　见文[20]定理14.4.

引理6.10.3　设C是所有Cubic-full数构成的集合, 则有

$$\sum_{\substack{n\leq x\\n\in C}}1=Nx^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$$

其中N是可计算的常数.

证明 见文[25]定理14.4.

定理的证明 本节我们利用前面的引理来完成定理的证明. 对任意的正整数$n>1$, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, A 为所有无平方因子的集合, B为至少含有一个素因子的指数≥ 2 的整数之集合, C 为所有素因子的指数不超过k的整数构成的集合.

对于定理1, 我们有

$$\sum_{n\leq x}(f(n)-1)^2=\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}(f(n)-1)^2+\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}(f(n)-1)^2$$

当$n\in A$, 由$f(n)$的定义易知$\sum\limits_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}(f(n)-1)^2=\sum\limits_{\substack{n\leq x\\ n\in A}}(1-1)^2=0$, 当$n\in B$, 设$f(n)=k$, p 为k 所对应的素因子, 结合引理6.10.1我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}(f(n)-1)^2 &= \sum_{\substack{n\leq x\\ f(n)=k,\ n\in B}}(k-1)^2\\
&= \sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}}\sum_{\substack{n\leq \frac{x}{p^k}\\ (n,\ p)=1,\ n\in C}}(k-1)^2\\
&= \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)^2\sum_{p\leq x^{\frac{1}{k}}}\left[\frac{1}{\zeta(k+1)}\frac{p-1}{p^{k+1}-1}x+O\left(\left(\frac{x}{p^k}\right)^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\right]\\
&= x\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{\zeta(k+1)}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{k}}}\frac{p-1}{p^{k+1}-1}+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\\
&= x\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{\zeta(k+1)}\left(\sum_{p}\frac{p-1}{p^{k+1}-1}-\sum_{p>x^{\frac{1}{k}}}\frac{p-1}{p^{k+1}-1}\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)\\
&= x\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{\zeta(k+1)}\sum_{p}\frac{p-1}{p^{k+1}-1}+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

注意当$k\geq 2$时, $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{\zeta(k+1)}\sum\limits_{p}\frac{p-1}{p^{k+1}-1}$收敛, 故有

$$\sum_{n\leq x}(f(n)-1)^2=bx+O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$$

其中$b=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)^2}{\zeta(k+1)}\sum\limits_{p}\frac{p-1}{p^{k+1}-1}$, ϵ为任意给定的正数, $\zeta(s)$为Riemann zeta-函数.

于是证明了定理6.10.

现在我们来证明定理6.11. 设B是所有Square-full数构成的集合, C是所有不属于B的整数构成的集合, D是所有Cubic-full数构成的集合. 由引理1和引理6.10.2及注意到当n含有任意素数的一次方幂时, $\overline{f}(n)-1=0$, 于是有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\left(\overline{f}(n)-1\right)^2 &= \sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}\left(\overline{f}(n)-1\right)^2+\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in C}}\left(\overline{f}(n)-1\right)^2\\
&= \sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B\backslash D}}\left(\overline{f}(n)-1\right)^2+\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in D}}\left(\overline{f}(n)-1\right)^2\\
&= \left(\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}1-\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in D}}1\right)+O\left(\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in D}}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}-1\right)^2\right)\\
&= \sum_{\substack{n\leq x\\ n\in B}}1+O\left(\sum_{\substack{n\leq x\\ n\in D}}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}-1\right)^2\right)\\
&= \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)}\cdot x^{\frac{1}{2}}+O\left(x^{\frac{1}{3}}\ln^2 x\right)
\end{aligned}$$

于是完成了定理6.11的证明.

第七章 一些与 Smarandache 问题相关的译文

7.1 引言

本部分我们翻译了近期国外学者对Smarandache 问题研究的一些重要结果及其应用, 译者为刘艳艳, 王锦瑞, 杨衍婷等同学. 在此, 我们衷心感谢这几位同学对本书所做的大量有益工作.

7.2 利用 Smarandache 方法求解丢番图方程$ax^2-by^2+c=0$

我们考虑方程: (1) $ax^2-by^2+c=0$, 其中$a,b\in N$ 且$c\in Z$. 这是Pell's 方程$x^2-Dy^2=1$ 的推广. 这里, 我们指出: 如果这个等式有整数解并且$a\cdot b$ 不是完美平方数, 那么(1) 式有无限多个整数解; 这样我们用原始方法给方程的整数通解(x_n,y_n) 找到一个闭的表达式. 并且我们把它推广到任意包含两个未知数的二次丢番图方程. [这篇文章于"Gaceta Matematica", Volumen 1, Numero 2, 1988, pp.151-7. 被Francisco Bellot Rasado 教授翻译为西班牙语: .Un metodo de resolucion de la ecuacion diofantica..]

7.2.1 方程$ax^2-by^2+c=0$ 的求解

如果$ab=k^2$ 是完美平方数($k\in N$) 等式(1) 至多有有限整数解, 因为(1) 式可改写为: (2) $(ax-ky)(ax+ky)=-ac$. 如果(a,b)不整除c, 则丢番图方程无解.

证明 如果(1) 式有很多整数解.设(x_0,y_0), (x_1,y_1) 为(1)式最小的整数解且$0\le x_0<x_1$. 我们建立一个循环序列(3):

$$\begin{cases} x_{n+1}=\alpha x_n+\beta y_n; \\ y_{n+1}=\gamma x_n+\delta y_n, \end{cases}$$

使得(3)式的条件恰好满足(1)式. 其条件为:

$$\begin{cases} a\alpha\beta = b\gamma\delta & (4); \\ a\alpha^2 - b\gamma^2 = a & (5); \\ a\beta^2 - b\delta^2 = -b & (6), \end{cases}$$

其中$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为未知数.

我们从(5)式和(6)式中分别拿出α^2, β^2 来代替(4)式中的α^2, β^2, 将会得到(7): $a\delta^2 - b\gamma^2 = a$.

我们再从(5)式中减去(7)式便可得到

$$\alpha = \pm\delta \quad (8).$$

代替(4)式中的(8)我们得到:

$$\beta = \pm\frac{b}{a}\gamma \quad (9).$$

接着, 我们代替(5)式中的(8), 以及(6)式中的(9)

我们可以得到相同的方程:

$$a\alpha^2 - b\gamma^2 = a \quad (10).$$

因为我们只考虑正整数解, 我们取

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \frac{b}{a}\gamma_0 y_n; \\ y_{n+1} = \gamma_0 x_n + \alpha_0 y_n, \end{cases}$$

其中(α_0, γ_0) 是(10)式的最小的正整数解使得$\alpha\gamma \neq 0$.

设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \frac{b}{a}\gamma_0 \\ \gamma_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

当然, 如果(x', y') 是(1)式的一个整数解, 那么

$$A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

,

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

是另一个解, 其中A^{-1} 是矩阵A 的逆矩阵, 即$AA^{-1} = A^{-1}A = I$(单位矩阵). 于是, 如果(1)式有整数解, 则一定有无限多个. 等式(1)的正整数通解是$(x_n', y_n') = (| x_n |, | y_n |)$.

(GS_1):

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

利用转换公式$A_0 = I$, $A^{-k} = A^{-1} \cdots A^{-1}$ 为k 个A^{-1} 相乘. 在问题中我们最好记(GS) 为

$$\begin{pmatrix} x_n' \\ y_n' \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

(GS_2) 表示

$$\begin{pmatrix} x_n'' \\ y_n'' \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

由reduction ad absurdum 我们可证明, $(GS2)$ 是(1)式的正整数通解. 设(u, v) 为(1)式的一个正整数特解. 如果存在$k_0 \in N$:

$$(u, v) = A^{k0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

或者存在$k_1 \in N^*$:

$$(u, v) = A^{k1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

于是$(u, v) \in (GS_2)$. 与此矛盾的是, 我们计算可得

$$(u_{i+1}, v_{i+1}) = A^{-} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

其中$i = 1, 2, \cdots$, $u_0 = u$, $v_0 = v$. 显然对所有的i, 我们知道$u_{i+1} < u_i$, 注意到$x_0 < u_{i0} < x_1$, 又有$0 < u_{i0} < x_0$, 这是不可能的.

显然我们有

$$GS_3\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ \varepsilon y_o \end{pmatrix}$$

其中$n \in N$, $\varepsilon = \pm 1$

现在我们把通解$(GS3)$ 转换成闭的形式. 设λ 为实数. Det $(A - \lambda I) = 0$ 包括两个解$\lambda_{1,2}$ 和两个向量$V_{1,2}$ (例如: $Av_i = \lambda_i v_i$, $i \in 1, 2)$.

注意到

$$P = A^n\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^t \in M_2(R)$$

于是

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

.

那么

$$A^n = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_{2n} \end{pmatrix}$$

把此式代入$(GS3)$ 中可找到$(GS3)$ 的闭表达式.

举例 1. 对丢番图方程$2x^2 - 3y^2 = 5$ 可得

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

且$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$, $v_{1,2} = (\sqrt{6}, \pm\sqrt{2})$, 对任意的$n \in N$, 由x_n和y_n的闭表达式:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{4 + \epsilon\sqrt{6}}{4}(5 + 2\sqrt{6})^n + \dfrac{4 - \epsilon\sqrt{6}}{4}(5 - 2\sqrt{6})^n; \\ y_n = \dfrac{3\epsilon + 2\sqrt{6}}{6}(5 + 2\sqrt{6})^n + \dfrac{3\epsilon - 2\sqrt{6}}{6}(5 - 2\sqrt{6})^n. \end{cases}$$

2. 对等式$x^2 - 3y^2 = 0$, 其整数通解为:

$$\begin{cases} x_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n; \\ y_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n\right). \end{cases}$$

.

对任意的n, 即就是$(2,0), (4,2), (14,8), (52,30)\cdots$.

留给读者的例子 解决丢番图等式:
3. $x^2-12y^2+3=0$.
注:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \epsilon \end{pmatrix} =?$$

4. $x^2-6y^2-10=0$.
注:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ \epsilon \end{pmatrix} =?$$

5. $x^2-12y^2-9=0$.
注:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} =?$$

推广 如果$f(x,y)=0$ 是有两个未知数的二次丢番图方程, 通过线性转换可变成

$$(12): \quad ax^2+by^2+c=0.$$

其中$a,b,c\in Z$. 如果$ab\geq 0$ 等式至多有有限多个整数解. 我们很容易给出例子:

7. 丢番图方程

$$(13) \qquad 9x^2+6xy-13y^2-6x-16y+20=0$$

能转换为

$$(14) \qquad 2u^2-7v^2+45=0,$$

其中

$$(15) \qquad u=3x+y-1 \qquad v=2y+1.$$

我们求解(14)式.
即:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 15u_n + 28v_n; \\ v_{n+1} = 8u_n + 15v_n. \end{cases} \qquad (16)$$

其中$(u_0, (u_0) = (3, 3\epsilon)$.

第一个结论: 通过归纳我们可证明: 对任意的$n \in N$我们有v_n 是奇数, 且u_n 和v_n 都是3 的倍数对第$n+1$ 个, 我们有: $v_{n+1} = 8u_n + 15v_n = \text{even} + \text{odd} = \text{odd}$, 当然u_{n+1}, v_{n+1} 是3 的倍数因为u_n, v_n 也是3 的倍数. 于是, 存在x_n, y_n 是整数, 对任意的$n \in N$, 由(15)式可得:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{2u_n - v_n + 3}{6}; \\ y_n = \dfrac{v_n - 1}{2}. \end{cases} \qquad (17)$$

现在我们知道(GS3) 对(14)式是闭的, 由(17)式的方法便可推导出(13)式的通解.

第二个结论: 对(13)式的另一个$(GS3)$ 的表达式我们可得到, 如果我们改变(15)式的形式为: $u_n = 3x_n + y_n - 1$, $v_n = 2y_n + 1$. 于是, 应用(16)式并且通过计算, 我们得到(18):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 11x_n + \dfrac{52}{3}y_n + \dfrac{11}{3}; \\ y_{n+1} = 12x_n + 19y_n + 3. \end{cases}$$

其中$(x_0, y_0) = (1, 1) or (2, .2)$.

设

$$A = \begin{pmatrix} 11 & \frac{52}{3} & \frac{11}{3} \\ 12 & 19 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

那么

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

其中$n \in N$.

由(18) 式我们总会有$y_{n+1} \equiv y_n \equiv y_0 \equiv \cdots \equiv 1(\text{mod}3)$, 于是$x_n \in Z$. 当然, (19) 和(17) 于(13)式的通解是等价的.

更多推广: 这种方法可以推广到丢番图方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = b \quad (20),$$

其中所有的$a_i, b \in Z$.

如果$a_i, a_j \geq 0$, $1 \leq i \leq j < n$, 等式(20) 有有限个解. 现在, 我们假设存在$i_0, j_0 \in 1, \cdots, n$ 其中$a_{i0} \cdot a_{j0} < 0$. 类似的, 对$n \in N$. 我们定义一个循环序列:

$$x_h^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_{ih} x_i^{(n)}, \quad \leq h \leq n$$

考虑$(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 为(20)式的最小的正整数解. 用它来代替(20)式中的(21)式, 确定系数并寻找n^2,未知数a_{ih}, $1 \leq i$, $h \leq n$. (这个积分比较复杂, 但可以通过计算机计算.) 应用同样的方法, 但是计算变得越来越复杂- 例如计算A^n 或许必须使用计算机.

(读者可以试着解丢番图方程$ax^2+by^2-cz^2+d=0$, 其中$a, b, c \in N^*$, $d \in Z$).

7.3 N 个素数的 Smarandache 特征

这篇文章主要给出了对于N个素数两两互素, 同时互素的充分必要的定理. 它给出了V. Popa's 的定理(参见文献[80]), 以及I.Cucurezeanu's 定理(参见文献[78]中的165页), Clement's 定理，S.Patrizio's 定理(参见文献[79])等等. 特别地, 这个推广的定理给出了对于两个素数, 四倍数个素数的不同特征.

很显然我们知道有下面的结论：

引理7.1 令A, B是非零的整数. 那么:

$$AB \equiv 0(\text{mod}pB) \Leftrightarrow A \equiv 0(\text{mod}p) \Leftrightarrow \frac{A}{p}$$

是一个整数.

引理7.2 令$(p,q)\sim 1$, $(a,p)\sim 1$, $(b,q)\sim 1$. 那么:

$$A\equiv 0(\mathrm{mod}p), B\equiv 0(modq)$$
$$\Leftrightarrow aAq+bBp\equiv 0(\mathrm{mod}pq)$$
$$\Leftrightarrow aA+\frac{bBp}{q}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$$
$$\Leftrightarrow \frac{aA}{p}+\frac{bB}{q}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$$

是整数.

证明 对于第一个等式, 我们有$A=K_1p$, $B=K_2q$, 其中$K_1,K_2\in Z$, 所以有

$$aAq+bBp=(aK_1+bK_2)pq.$$

反商：$aAq+bBp=Kpq$,其中$K\in Z$, 它使得$aAq\equiv 0(\mathrm{mod}p)$, $bBp\equiv 0(\mathrm{mod}q)$, 但是从假设我们可以知道

$$A\equiv 0(\mathrm{mod}p), B\equiv 0(\mathrm{mod}q).$$

第二个和第三个等式可以由引理7.1得知.

通过相乘我们可以把这个引理推广到

引理7.3 令$p_1,\cdots,p_n$ 是两两互素的整数，并且令$a_1,\cdots,a_n$ 是使得对于所有的i, $(a_i,p_i)\sim 1$ 的整数. 则有:

$$A_1\equiv 0(\mathrm{mod}p_1),\cdots,A_n\equiv 0(\mathrm{mod}p_n)$$
$$\Leftrightarrow \frac{P}{D}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ip_i}{p_i}\equiv 0(\mathrm{mod}\frac{P}{D})$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}a_iA_i\cdot\prod_{j\neq i}p_j\equiv 0(\mathrm{mod}p_1\cdots p_n)$$

其中$P=p_1\cdots p_n$ 和D 是p 的一个因子, $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{a_ip_i}{p_i}$ 是一个整数.

从最后一个引理我们立即可以得到一个推广的定理:

定理7.3　令$p_{ij}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m_i$ 是两两互素的整数, 令$r_1, \cdots, r_n, a_1, \cdots, a_n$ 是使得对于所有的i, a_i 与r_i是互素的整数.

我们考虑下面的几种情况：

(i) $p_{i_1}, \cdots, p_{i_n}$ 同时互素当且仅当$c_i \equiv o(\mathrm{mod} r_i)$, 对于所有的$i$.

那么：数$p_{ij}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m_i$互素当且仅当

$$\frac{R}{D} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{r_i} \equiv 0(\mathrm{mod}\frac{R}{D}) \qquad (*)$$

其中$P = \prod_{i=1}^{n} r_i$ 与D 是R 的一个因子.

注意：通常在条件(i)中, 模r_i等于$\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}$, 或者是它的一个因子, 在这种情况下推广的定理之间关系就成为：

$$\frac{P}{D} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}} \equiv 0(\mathrm{mod}\frac{P}{D})$$

其中$P = \prod_{i,j=1}^{n,m_i} p_{ij}$ 和D是P的一个因子.

推论　我们很容易得到最后一个关系等价于

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i \cdot \frac{P}{\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}} \equiv 0(\mathrm{mod} P)$$

而且

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{\prod_{j=1}^{m_i} p_{ij}}$$

是一个整数, 等等.

从推广的定理中对于数的限制是很广的, 因为如果有两个不互素的数, 则至少从这些不互素的数里有一个使得$m_1 + \cdots + m_n$ 可能不互素.

推广的定理有很多变量通过对参数$a_1, \cdots, a_n$与$r_1, \cdots, r_n$, D给定值, 以及同余$c_1, \cdots, c_n$的表现为要么是一个素数要么同时是许多其他的素数.

我们可以从定理(C_i的情况)开始, 这个定理主要体现为得到一个素数［参见Wilson，Leibniz， Smarandache[81], 或（p 是一个素数当且仅当$(p-k)!(k-1)!-(-1)^k \equiv 0(\bmod p)$ ），当$p \geq k \geq 1$；这里, 最好取$k = \lfloor \frac{p+1}{2m} \rfloor$, 其中$\lfloor x \rfloor$表示不超过$x$ 的最大的整数, 目的是使得$(p-k)!(k-1)!$是最小的], 通过运用推广的定理, C_i' 的情况, 以同时出现很多素数为特性. 然后, 从C_i, C_i' 的情况, 再用推广的定理, 我们发现一些新的情况C_h', 以同时出现很多素数为特性. 类似地, 我们继续可以用这种方法.

注意：

令$m_i = 1$, C_i 表示Simionov's 定理对于所有的i.

(a) 如果$D = 1$, 得出V.Popa's 定理, 这生成于Cucurezeanu's 定理, 最后一个生成于Clement's 定理.

(b) 如果$D = \frac{P}{P_2}$, 方便地选取参数a_i, k_i, 其中$i = 1, 2, 3$, 它可以得出S. Patrizio's 定理.

一些例子：

令$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 表示大于1的正整数, 并且两两互素，其中对于所有的i, $1 \leq k_i \leq p_i$. 那么：
$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 同时互素当且仅当

$$(T) \qquad \sum_{i=1}^{n} [(p_i - k_i)!(k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] \cdot \prod_{j \neq i} p_i \equiv 0(\bmod p_1 p_2 \cdots p_n)$$

或者

$$(U) \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} [(p_i - k_i)!(k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] \cdot \prod_{j \neq i} p_i}{p_{s+1} \cdots p_n} \equiv 0(\bmod p_1 p_2 \cdots p_n)$$

或者

$$(V) \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} [(p_i - k_i)!(k_i - 1)! - (-1)^{k_i}] \cdot p_j}{p_i} \equiv 0(\bmod p_j)$$

或者

$$(W) \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} [(p_i - k_i)!(k_i - 1)! - (-1)^{k_i}]}{p_i}$$

是一个整数.

另一个相关的例子(用[82]中第一个定理): p 是一个素数且是正整数当且仅当

$$(p-3)!-\frac{p-1}{2}\equiv 0(\bmod p)$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left[(p_i-3)!-\frac{p_i-1}{2}\right]p_1}{p_i}\equiv 0(\bmod p_1)$$

奇数p 与$p+2$ 是孪生素数当且仅当

$$(p-1)!(3p+2)+2p+2\equiv 0(\bmod p(p+2))$$

或者

$$(p-1)!(p-2)-2\equiv 0(\bmod p(p+2))$$

或者

$$\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{2(p-1)!+1}{p+2}$$

是一个整数.

孪生素数特征不同于Clement's 定理($(p-1)!4+p+4\equiv 0(\bmod (p(p+2)))$.

令$(p,p+k)\sim 1$, 那么: p 与$p+k$ 同时是素数当且仅当这不同于I.Cucurezeanu's 定理(参见文献[78], P_{165}:

$$k\cdot k![(p-1)!+1]+[k!-(-1)^k]p\equiv 0(\bmod p(p+k))$$

看素数四倍数$p,p+2,p+6,p+8$:

$$\frac{(p-1)!+1}{p}+\frac{(p-1)!2!+1}{p+2}+\frac{(p-1)!6!+1}{p+6}+\frac{(p-1)!8!+1}{p+8}$$

是一个整数.

对于两两互素的整数$p-2,p,p+4$, 我们有下列关系:

$$(p-1)!+\frac{p\left[(p-3)!+1\right]}{p-2}+\frac{p\left[(p+3)!+1\right]}{p+4}\equiv -1(\bmod p)$$

这不同于S.Patrizio's定理

$$\frac{8(p+3)!}{p+4}+\frac{4(p-3)!}{p-2}\equiv -11(\mathrm{mod}p).$$

7.4 Smarandache素数等式猜想的三个问题

Smarandache提出了以下猜想:

对任意$k\geq 2$的整数, 丢番图方程

$$y=2x_1x_2\cdots x_k+1$$

有无穷多个解, 其中y和x_i都是素数, $i=1,2,\cdots,k$.

该猜想看起来是正确的, 但还有待进一步研究. 因为众所周知, 素数分布中还有许多具体问题尚未解决.

因为2是最小的素数, 故我们考虑该问题的一种特殊情况, 即研究

$$p_m=p_1p_2\cdots p_n+1$$

的解, 其中$p_1=2$, $p_1<p_2<\cdots<p_n$, $m>n$.

由计算知前几个值为:

$$2+1=3,$$

$$2\times 3+1=7,$$

$$2\times 3\times 5+1=31,$$

$$2\times 3\times 5\times 7+1=211,$$

$$2\times 3\times 5\times 7\times 11+1=2311,$$

易见这几个值都是素数, 但这只是特殊情况.

问题1.84: 找出所有n值使得等式

$$p_m=p_1p_2\cdots p_n+1 \tag{7-1}$$

成立, 其中p_i是素数, $i=1,2,\cdots,n$, 且$m>n$.

问题1.85: 求当$m = 2n$, $m = n^2$, $m = \dfrac{n(n+1)}{2}$时, 上述方程的所有解.

问题1.86: 求

$$y^2 = 2x_1x_2\cdots x_k + 1 \tag{7-2}$$

的所有解, 其中k为使得$x_1x_2\cdots x_k$乘积最小的正整数. 并讨论对任意的正整数k, 该方程是否存在解.

7.5 与Andrica 猜想相关或对 Andrica 猜想推广的六个Smarandache 猜想

我们用下面几个例子来列举关于几对连续的素数的六个猜想.

1) 方程$p_{n+1}^x - p_n^x = 1$ (1), 在0.5 和1 之间有唯一的解.

其中p_n 是第n 个素数. 检验前168个素数(小于1000), 有人得到:

–当$n = 1$时, 有最大解$x = 1$. 即就是: $3^x - 2^x = 1$.

–当$n = 31$时, 有最小解$x = 0.567148... = a_0$ (2). 即就是: $127^x - 113^x = 1$.

这样Andrica 猜想

$$A_n = \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

推广为:

2) $B_n = p_{n+1}^a - p_n^a < 1$ (3). 其中$a < a_0$.

值得注意的是在Andrica 猜想中, 当$11^x - 7^x = 1$ 时是x没有最小值, 但是在例(2)中当$a_0 = 0.567148\ldots$时却会有最小值.

在Andrica 猜想中, (3)式的函数B_n是无限接近(2)式的.

观察如下图表中中解决的素数幂方程(近似地:素数差值越大等式(1)的结越小; 对于同样的素数差值, 素数越大, x值越大):

$3^x - 2^x = 1$, 的解为$x = 1.000000$.

$5_x - 3_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.727160$.

$7_x - 5_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.763203$.

$11_x - 7_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.599669$.

$13_x - 11_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.807162$.

$17_x - 13_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.647855$.
$19_x - 17_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.826203$.
$29_x - 23_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.604284$.
$37_x - 31_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.6297224$.
$97_x - 89_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.638942$.
$127_x - 113_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.567148$.
$149_x - 139_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.6297224$.
$191_x - 181_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.643672$.
$223_x - 211_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.625357$.
$307_x - 293_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.620871$.
$331_x - 317_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.624822$.
$497_x - 467_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.663219$.
$521_x - 509_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.666917$.
$541_x - 523_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.616550$.
$751_x - 743_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.732707$.
$787_x - 773_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.664972$.
$853_x - 839_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.668274$.
$877_x - 863_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.669397$.
$907_x - 887_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.627848$.
$967_x - 953_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.673292.$.
$997_x - 991_x = 1$, 的解为$x \simeq 0.776959$.

如果$x > a_0$，连续素数的不同的x次幂一般来说都是大于1的. 再进一步检验:

$3^{0.99} - 2^{0.99} \simeq 0.981037$.
$11^{0.99} - 7^{0.99} \simeq 3.874270$.
$11^{0.60} - 7^{0.60} \simeq 1.001270$.
$11^{0.59} - 7^{0.59} \simeq 0.963334$.
$11^{0.55} - 7^{0.55} \simeq 0.822980$.
$11^{0.50} - 7^{0.50} \simeq 0.670873$.
$389^{0.99} - 3830.99 \simeq 5.596550$.
$11^{0.599} - 7^{0.599} \simeq 0.997426$.
$17^{0.599} - 13^{0.599} \simeq 0.810218$.
$37^{0.599} - 31^{0.599} \simeq 0.874526$.
$127^{0.599} - 113^{0.599} \simeq 1.230100$.
$997^{0.599} - 991^{0.599} \simeq 0.225749$.

$127^{0.5} - 113^{0.5} \simeq 0.639282.$

3) $C_n = p_{n+1}^{\frac{1}{k}} - p_n^{\frac{1}{k}} < \frac{2}{k}$, 其中p_n 为第n个素数, 且$k \geq 2$ 为整数.

$11^{\frac{1}{2}} - 7^{\frac{1}{2}} \simeq 0.670873.$

$11^{\frac{1}{4}} - 7^{\frac{1}{4}} \simeq 0.1945837251.$

$11^{\frac{1}{5}} - 7^{\frac{1}{5}} \simeq 0.1396211046.$

$127^{\frac{1}{5}} - 113^{\frac{1}{5}} \simeq 0.060837.$

$3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} \simeq 0.317837.$

$3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} \simeq 0.1823285204.$

$5^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} \simeq 0.2677263764.$

$7^{\frac{1}{3}} - 5^{\frac{1}{3}} \simeq 0.2029552361.$

$11^{\frac{1}{3}} - 7^{\frac{1}{3}} \simeq 0.3110489078.$

$13^{\frac{1}{3}} - 11^{\frac{1}{3}} \simeq 0.1273545972.$

$17^{\frac{1}{3}} - 13^{\frac{1}{3}} \simeq 0.2199469029.$

$37^{\frac{1}{3}} - 31^{\frac{1}{3}} \simeq 0.1908411993.$

$127^{\frac{1}{3}} - 113^{\frac{1}{3}} \simeq 0.191938.$

4) $D_n = p_{n+1}^a - p_n^a < \frac{1}{n}$ (4) 对有限多个连续素数成立.

其中$a < a_0$ 且n 足够大, $n = n(a)$.

a) 对$a < 1$ 式子是否仍然成立?

b) 是否存在取决于a 和n 的n_0 使得对所有的$n \geq n_0$ (4) 式都成立?

几个例子:

$5^{0.8} - 3^{0.8} \simeq 0.21567.$

$7^{0.8} - 5^{0.8} \simeq 1.11938.$

$11^{0.8}7^{0.8} \simeq 2.06621.$

$127^{0.8} - 113^{0.8} \simeq 4.29973.$

$307^{0.8} - 293^{0.8} \simeq 3.57934.$

$997^{0.8} - 991^{0.8} \simeq 1.20716.$

5) $\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq 5/3$ (5), 当$n = 2$ 时有最大值. (两个连续素数的比值是有极限的, 但是$p_{n+1}p_n$ 可以取无限大的值.)

6) 然而, $\frac{1}{p_n}\frac{1}{p_{n+1}} \leq 1/6$, 当$n = 1$时有最大值.

7.6 Christianto-Smarandache 在经济学中的聚商场理论

在这篇文章中, 我们提出了一个新的理论—聚商场理论. 2008年5月3日, 我们在Google搜索引擎中没有搜到任何关于它的结果,

所以我们在此是第一次介绍它.

聚商场理论（Poly-emporium Theory)词源来自于:Poly译为“许多”, emporium译为“销售门类众多的商品的贸易中心”, 因此聚商场理论是研究各种大小公司在市场中的相互作用的学说.

聚商场理论与寡头卖主垄断不同, 因为它还包括了对小公司的思考(不只是大公司主导市场的寡头垄断). 聚商场认为市场的真实情况是大, 小公司共同存在并或多或少相互作用.

首先, 我们来介绍的双头卖主垄断理论是A.Cournot(1801-1877)在1838年提出的由两个公司在市场中共同主载和相互影响的理论.

在Cournot的模型中, 如果一个公司改变了自己的产量, 那么另一个公司也会相应的改变它的产量. 最后两个公司的产量同时达到一个平衡点.

1883年, 在由Joseph-Bertrand（1822-1900）设计的Bertrand双头卖主垄断模型中, 如果一个公司改变了他的价格, 第二个公司也会跟随, 最终两个公司会达到一个他们都预期好的价格平衡.

两个模型像两个相似的数学数列逐渐地趋向相同的极限.

Bertrand的模型因为它忽略了生产成本和新公司的进入而被批评.

寡头卖主垄断是对双头卖主垄断的扩展, 由少数销售公司控制的市场. 在很大程度上这些公司之间的相互作用制定了高而且刚性的价格. 一个完全的寡头卖主垄断中, 所有的公司生产相同的产品. 不完全的寡头卖主垄断中, 所有的公司的产品是有区别的, 但在本质上是相似的.

Thomas More先生（1478-1535）在他的“乌托邦”理论中应用了此定理, 后来A.Cournot.也应用了它. 每一个公司在它的市场份额中可以作为一个领导者, 或者他们相互勾结, 或者一个公司制定价格, 其他公司跟随.

与寡头卖主垄断类似的还有寡头买主垄断, 一些收购公司控制着市场. 他们制定低而且刚性的价格标准.

卡特尔通过限定生产量和销售来左右价格. 但是它的影响程度不及垄断或者寡头卖主垄断.

刚性的价格或定价管理是由垄断, 寡头卖主垄断, 政府组织和卡特尔所制定的.

聚商场理论

在同一个市场中, 生产同类产品的n个公司, F_1,F_2,...,F_n,$n \geq 3$, 如何相互作用呢? 这里的公司可以是企业, 有限公司, 独资或者合伙企业.

我们这里有聚商场理论的3个例子, 将详述如下:

1）所有的公司都很强大, 并主载市场. 所以我们可以有一个寡头卖主垄断或者寡头买主垄断.

2）有些公司强大, 并占据大部分市场份额, 而其他公司小, 且不占主导地位.

在这种情况下, 小企业正如增长极理论一样围绕一些大型企业聚拢(如卫星), 其他小公司可能会退出竞争.

这种情况还包括新公司进入市场的可能性, 所以他们开始于小规模投资, 然后成长起来.

同时, 如果大公司间的合作成功淘汰了小型竞争者, 或者半寡头卖主垄断, 半寡头买主垄断控制了大部分市场份额, 但不是整个市场, 他们就都有可能导致寡头卖主垄断/寡头买主垄断.

小公司也可以共谋合作形成大的公司.

3）所有的公司都很小, 他们都不可主导市场.

在数学中, 它有类似相互作用的n 个数列. 我们需要研究他们的极限. 他们会趋于相同的极限吗?

肯定的说, 他们之间存在着垄断竞争.

如垄断, 每家公司都试图在市场中占支配地位, 以防止竞争, 控制价格. 但是在绝大多数资本主义国家, 垄断是非法的. 如果一个公司, 不是一般性, 假定F_1公司改变了产量, 其他F_2,...,F_n 公司也应该作出反应, 否则他们将失去客户.

如果这是一个不完全竞争, 即市场中有大量卖家和卖家生产着不同的产品, 这些公司间的相互作用小于其在一个完美的竞争中. 他们都趋向于一个我们所谓的多平衡. 就像数学中的加权平均值.

尽管如此, 在完全竞争中, 如果他们为众多客户生产同类的产品, 他们的相互依存关系将增加.失去平衡的公司也会影响到其他公司.

如果先进的技术应用于一些公司, 那么他们产品的质量就会提升, 从而导致同类产品价格的下降.

这可能产生理论上的增长极, William Petty(1623-1687)和Francois Perroux (1903-1987)所阐述的, 核心企业作为催化剂会促使小公司组织起来. 产量最大程度的增长和产品质量的卓越促使这些公司进行优化管

理.

这是买主独家垄断, 从而一个单一买方主导市场会迫使卖方接受买方的条件. 因此, 在这种情况下, 企业们在买方的条件下竞争. 例如, 如果政府控制文化经济, 就会出现政府制定价格的情况.

在合并理论中, 如果许多公司开展合作, 那将会造成大家类似的产出水平和价格, 那么其他公司要么加入勾结, 促使封锁或垄断控制市场, 但在资本主义国家这是违法的, 要么他们也可以通过降低价格或提高生产技术来改变其产量, 从而提高产品质量.

另一个备选方案是个体企业组成他们之间一个相对独立的合并, 从而达到平衡, 或者也有一些公司的混入. 一部分公企业可能会退出市场, 而新的企业将进入市场.

如果政府控制文化经济, 那么工会文化工作者应建立制衡机制. 由于这将产生由单一客户和单一卖主形成的市场垄断, 所以其通常关系到政府的职能条件和工会工作者的薪金.

市场的动力使企业在一个永久性的竞争中生存, 竞争意味着进步.

我们扩展了恩格尔定律（1857年）和文化相关的定律. 我们认为用于购买食品的收入比例降低可以看作是个人收入的增加.

随着个人收入的增加, 用于文化活动的收入比例减少.

个人收入的提高加快了文化经济学加速度的产生.

此外, 通过被J.M.Keynes(1918年)完善(1936年, 20世纪60年代,和70年代)和后来被James Tobin改进(1918年) 的绝对收入假说, 我们得到了的绝对收入假说适用于文化经济学: 随着收入的增加, 文化消费有上升的趋势, 但通常它们不会有相同的增长速度.

18世纪的绝对优势理论陈述了在一些特殊领域, 人民和国家的贸易由于已经超越了生产, 变得不适用于文化经济学. 同时比较优势的方法也没有取代绝对优势理论的工作. 因为我们无法真正比较文化.

Robert Torrens(1780-1864年)和David Ricardo(1772-1823)开发的比较成本理论, 都有一个比较优势的特点, 他们都主张国家之间的贸易是有效的, 因为产品的多样性，使得对于一个国家更有效, 另外, 文化经济学的优点来自于文化的差异. 文化的区别提供了更好的机会来发展文化经济学.

经济文化是娱乐产业的一部分, 各种系列的产品取决于口味, 广告, 好奇, 历史, 多样性和特色.

最有趣的例子是第三个. 其中的所有n个公司都规模小, 他们不主导市场. 让我们看看, 例如, 在城市里一个靠独立经营的许多餐厅网络, 他们彼此互动很少, 他们不同的质量, 口味, 距离和价格使他们之间的差异很大.

但在有限的条件在, 他们不勾结, 因为每个餐厅都不想失去自己的特色, 口感. 他们不能形成一个寡头垄断, 因为由于人们口味的变化周期, 所有新的餐厅都很容易凭借自己的特色打入市场. 他们很容易形成多平衡, 同样对国际文化经济, 每一种文化都有其特色, 也正由此来吸引游客.

一般情况下, 这n个公司最终趋向于多平衡, 并在平衡点停留一段时间. 这多平衡中各企业趋向于它自己具体的分平衡.

由于技术, 政府的干预, 战争, 危机, 公司的重组, 客户的口味和偏好的改变, 这种多平衡会定期地部分或完全破坏, 但随后这些公司又会再次恢复稳定. 这种多平衡的周期是一种自然状态, 因为经济是动态的, 他们可以凭借干扰的跳板得到重新恢复; 为了平衡市场, 这n个企业必须提高他们的技术, 结构, 降低生产成本, 否则他们将逼迫退出竞争. 罗马谚语说”所有的坏是为了好“, 所以后来的不平衡会给经济带来新的血液.

这个平衡-不平衡的循环周期会不断地重复出现.

7.7 一个Smarandache 同余函数

7.7.1 引言

在这篇文章中我们定义一个函数L, 这个函数可以可以将数论中的很多定理得到非常广泛的推广. 例如Wilson定理, Fermat定理, Euler定理, Gauss定理, Lagrange定理, Leibniz定理, Moser定理以及Sierpinski 定理.

7.7.2 内容介绍

设p 为一个奇素数, 令集合$A = m \in Z \mid m = +p^\beta, 2p^\beta$, 其中$\beta \in N^*, m = +2^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2$, 或$m = 0$.

令$m = \varepsilon p_1^{\alpha^1} ... p_r^{\alpha^r}$, 其中$\varepsilon = +1$, $\alpha_i \in N*$, $p_1, ..., p_r$ 分别为不同的素数.

我们建立函数$L: Z \times Z$,

$$L(x,m)=(x+c_1)\cdots(x+c_{\phi(m)}).$$

其中$c_1,...,c_{\phi(m)}$ 为模m 的简化剩余系, ϕ 为Euler 函数.
如果所有的素数p_i 整除x 和m. 那么:
如果$m \in A$, 则

$$L(x,m)\equiv \pm 1(\bmod\ \ p_{i1}^{\alpha_i^1}...p_{ir}^{\alpha_i^r}).$$

如果$m \notin A$, 则

$$L(x,m)\equiv \pm 0\left(\bmod\ \ m/(p_{i1}^{\alpha_i^1}...p_{ir}^{\alpha_i^r})\right).$$

对$d=p_{i1}^{\alpha_i^1}...p_{ir}^{\alpha_i^r}$ 并且$m'=\frac{m}{d}$ 我们发现

$$L(x,m)\equiv \pm 1+k_1^0 d\equiv k_2^0 m'(\bmod m),$$

其中k_1^0,k_2^0 构成是丢番图方程$k_2m'-k_1d=\pm 1$ (记号的选择是与A 中的m 相对应的)特解.

这个结果推广了高斯定理.($c_1\cdots c_{\phi(m)}\equiv \pm 1(\bmod m)$, 如果$m\in A$, 但$m\neq A$). 相应的这个结果还推广了Wilson 定理(如果p 为素数, 那么$(p-1)!\equiv -1(\bmod m)$).

证明 下面的两个简单引理是必须的:

引理1. 如果$c_1,\cdots,c_{\phi(p^\alpha)}$ 是模p^α 的剩余系, 其中p 为整数且$\alpha\in N^*$, 那么对任意的$k\in Z$, $\beta\in N^*$, 我们仍然有$kp^\beta+c_1,\cdots,kp^\beta+c_{\phi(p^\alpha)}$ 构成与p^α 互素的p^α 的剩余系. 很显然, 我们可以证明对$1\leq i\leq \phi(p^\alpha)$ 我们有$kp^\beta+c_i$ 与p^α 互素.

引理2. 如果$c_1,\cdots,c_{\phi(p^\alpha)}$ 是与m 互素的m的剩余系, $p_i^{\alpha_i}$ 整除m 且$p_i^{\alpha_i 1}$ 不整除m, 那么$c_1,\cdots,c_{\phi(p^\alpha)}$ 构成模$p_i^{\alpha_i}$ 的剩余系$\phi(\frac{m}{p_i}{}^{\alpha_i})$.

引理3. 如果$c_1,\cdots,c_{\phi(q)}$ 为与b 互素的模q 的剩余系, 那么$b+c_1,\cdots,b+c_{\phi(q)}$ 包含一个模q 的剩余系$\widehat{O}$.

当然, 因为$(b, q-b)=1$ 那么存在一个$c_{i0}=q-b$, 使得$b+c_i=Mq$ (q的乘积).

由以上的引理我们有:

定理1. 如果$(x, m/({p_{i1}}^{\alpha_{i1}}\cdots{p_{ir}}^{\alpha_{ir}}))=1$, 那么

$$(x+c_1)\cdots(x+c_{n_{(m)}})\equiv 0(\bmod\ \ m/({p_{i1}}^{\alpha_{i1}}\cdots{p_{ir}}^{\alpha_{ir}})).$$

引理4. 因为$c_1\cdots c_{\phi(m)}\equiv\pm 1(\bmod m)$, 那么对所有的的$i$, 当$m\in A$或者$m\notin A$ 时必然有$c_1\cdots c_{\phi(m)}\equiv\pm 1(\bmod p_i^{\alpha_i})$.

引理5. 如果p_i 整除x和m, 那么当$m\in A$ 或者$m\notin A$ 时有$c_1\cdots c_{\phi(m)}\equiv\pm 1(\bmod p_i^{\alpha_i})$. 当然, 从引理*2*, 引理*1*和引理*4*, 我们有

$$(x+c_1)\cdots(x+c_{\phi(m)})\equiv c_1\cdots c_{\phi(m)}\equiv\pm 1(\bmod p_i^{\alpha_i}).$$

从引理5 我们可得到:

定理2. 如果$p_{i1},\cdots,p_{ir}$ 为素数, 且整除x, m, 那么$(x+c_1)\cdots(x+c_{\phi(m)})\equiv\pm 1(\bmod p_i^{\alpha_i})$.

从定理1和定理2我们知道$L(x,m)=\pm 1+k_1d=k_2m^{'}$, 其中$k_1,k_2\in Z$. 因为$(d,m^{'})=1$, 丢番图方程$k_2m^{'}-k_1d=\pm 1$ 有正整数解(k_1, k_2为未知数). 于是$k_1=m^{'}t+k_1^0$ 和$k_2^0=dt+k_2^0$, $t\in Z$, 且k_1^0,k_2^0 构成方程的一个特解. 因此:

$$L(x,m)\equiv\pm 1+m^{'}dt+k_1^0(\bmod m)$$

或者

$$L(x,m)\equiv k_2^0(\bmod m).$$

7.7.3 应用

Lagrange 定理推广了Wilson 定理如下: 如果p 为素数, 那么

$$x^{p-1}-1\equiv(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)(\bmod p);$$

我们将用下面的方法来推广这个结论:

对任意的$m \neq 0, \pm 4$ 我们有, 若$x^2 + s^2 \neq 0$, 则$x^{\phi(m_s)+s} - x^s \equiv (x+1)(x+2)\cdots(x+\mid m \mid -1)(\text{mod} m)$, 其中$m_s$ 和s 可以从下面的运算中得到:

$$\begin{cases} x &= x_0 d_0; \quad (x_0, m_0) = 1 \\ m &= m_0 d_0; \quad d_0 \neq 1 \end{cases} \tag{7-3}$$

$$\begin{cases} d_0 &= d_0^1 d_1; \quad (d_0^1, m_1) = 1 \\ m_0 &= m_1 d_1; \quad d_1 \neq 1 \end{cases} \tag{7-4}$$

....

$$\begin{cases} d_{s-2} &= d_{s-2}^1 d_{s-1}; \quad (d_{s-2}^1, m_{s-1}) = 1 \\ m_{s-2} &= m_{s-1} d_{s-1}; \quad d_{s-1} \neq 1 \end{cases} \tag{7-5}$$

$$\begin{cases} d_{s-1} &= d_{s-1}^1 d_s; \quad (d_{s-1}^1, m_s) = 1 \\ m_{s-1} &= m_s d_s; \quad d_s \neq 1 \end{cases} \tag{7-6}$$

(参阅参考文献[88], [89]). 对任意的正素数m, 我们有$m_s = m$, $s = 0$ 且$\phi(m) = m - 1$, 这即就是Lagrange定理.

L.Moser 阐述了如下的定理: “如果p 为素数, 那么$(p-1)!a^p + a = Mp$ ”, 并且Sierpinski (参阅文献[87], P.57)证明了: “如果p 为素数, 那么$a^p + (p-1)!a = Mp$”, 这个定理则是Wilson, Fermat 定理的融合.

函数L 和上面的运算也仍然可以帮助我们推广他们, 于是: 如果a 和m 为整数, $m \neq 0$且$c_1, \cdots, c_{\phi(m)}$ 为模m 的剩余系, 那么

$$c_1 \cdots c_{\phi(m)} a^{\phi(m_s+s)} - L(0,m)a^s = Mm$$

$$-L(0,m)a^{\phi(m_s+s)} + c_1 \cdots c_{\phi(m)} a^s = Mm,$$

或者,

$$(x+c_1)\cdots(x+c_{\phi(m)})a^{\phi(m_s+s)} - L(x,m)a^s = Mm$$

$$-L(x,m)a^{\phi(m_s+s)}+(x+c_1)\cdots(x+c_{\phi(m)})a^s=Mm,$$

这个定理即就是Fermat 定理, Euler 定理, Wilson 定理, Lagrange 定理和Moser 定理的融合.

作者仍旧部分的推广了Moser定理以及Sierpinski 定理的结论(参阅参考文献[91], 问题7.140, PP.173-174), 于是: 如果m 为正整数, $m\neq 0,4$, 且a为一个整数, 那么$(a^m-a)(m-1)!=Mm$, 用另一种方法使得Fermat定理及Wilson定理得到融合.

Leibniz 证明了: “如果p 为素数, 那么$(p-2)!\equiv 1(\mathrm{mod}p)$”; 我们考虑“$c_i\leq_{i+1} c$”, 如果$c_i\leq_{i+1} c$, 其中$0\leq c_i<\mid m\mid$, $0\leq c_{i+1}<\mid m\mid$ 并且$c_i\equiv c_i(\mathrm{mod}m)$, $c_{i+1}\equiv c_{i+1}(\mathrm{mod}m)$; 我们很容易给出如果$c_1,c_2,\cdots,c_{\phi(m)}$ 为模m 的剩余系(对任意的$i,m\neq 0$, $c_1<c_{i+1}(\mathrm{mod}m)$), 那么如果$m\in A$ 或者$m\notin A$ 我们有$c_1c_2\cdots c_{\phi(m)-1}\equiv\pm 1(\mathrm{mod}m)$, 因为$c_{\phi(m)}\equiv -1(\mathrm{mod}m)$.

7.8 Smarandache G 增加序列, 数字序列, 普通周期序列和无数字序列

数论中介绍过很多新序列, 那么我们很容易想到, 每一个序列中有多少个素数? 在这篇文章中我们对下面的8个序列作了研究, 比如G 增加序列, 数字序列, 无数字序列, 娱乐序列(有趣的方法/运算/运算法则/区别/推广等等), 普通周期序列和算术函数.

1. G 增加序列(I)

假设$G=\{g1,g2,\cdots,gk,\cdots\}$ 为一个有序的正整数集合, 那么相应的G 增加序列由如下的定义给出:

$$SG=\{a_i:a_1=g_1,a_k=a_{k-1}\times 10+g_k\},\quad k\geq 1$$

H. Ibstedt 在关于SMARANDACHE 型数论理论首次全球会议(University of Craiova, Romania,August 21-24, 1997.) 中介绍了这个序列的部分情形.

a) G 增加序列的例子(II)

首先来研究如下的这些特殊情形:

a.1) 我们选择集合$G=\{1,3,5,7,9,11,\cdots\}$来得到如下的奇序列:

$$1, 13, 135, 1357, 13579, 1357911, 13571113, \cdots.$$

用椭圆素数因子程序我们发现在这个序列的前200项中有5个素数, 例如它的阶为2, 15, 27, 63, 93. 但是这个序列中的素数个数是有限个还是无限个呢?

a.2) 选择集合$G = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$ 来定义偶序列如下:

$$2, 24, 246, 2468, 246810, 24681012, \cdots$$

我们同样研究了这个序列的前200项, 没有发现任何n 次完美数, 没有完美平方数, 没有次数为$2p$的完美数, 其中p 是素数, 也没有伪素数.

猜想: 这个序列中没有n次完美数!

a.3) 选择集合$G = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots$来定义素数序列如下:

$$2, 23, 235, 2357, 235711, 23571113, 2357111317, \cdots$$

第2项和第4项为素数; 第128项(355 个数字) 和174 项(499个数字) 或许是, 但是我们无法检验这个序列的前200项.

问题: 这个序列中有无数多个还是有限个素数? (H. Ibstedt)

2) 无算术运算序列(I)

我们给出其中一个t项无算术运算序列的定义如下集合:

$\{a_i\}$, a_i 为最小的整数使得$a_i > a_{i-1}$

那么在这个集合中至少有$t-1$项在一种算术运算中. 我们利用QBASIC 语言程序建立一个这样的运算, 并且给出$t = 3$到15 的无算术运算的前65项(H. Ibstedt).

3) 串联型序列

假设$s_1, s_2, s_3, ..., s_n, \cdots$ 为无限个整数序列(记作S). 那么串联序列定义如下

$$s_1, \overline{s_1 s_2}, \overline{s_1 s_2 s_3}, \cdots.$$

H. Ibstedt 提出, 在一些特殊的情形中, 有多少项这样的串联序列属于最初的S序列?

4) 拆分型序列

设f 是一个算术函数, 且R是所有数中的k阶关系. 那么对任意的k和$n_1, n_2, \cdots, n_k$ 使得$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, n 有多少种用如下的形式表示的方法:

$$n = R(f(n_1), f(n_2), \cdots, f(n_k)),$$

观察一些特殊情形: n 能被表示为多少种非零平方(或者立方, m次)形式?

5) 幸运方法/运算法则/运算/微分/积分/等等.

一般情形: 幸运方法/运算法则/运算/微分/积分/等等, 称为用错误的方法运算等却得到了正确的结果. 错误的运算应该是有趣的, 有时类似于学生们常见的共同错误或者容易产生混淆, 矛盾.

是否能给出一个幸运微分或者幸运积分, 或者积分方程的幸运结论?

特殊情形: 如果用错误的计算得到一个正确的结果, 这个结果恰好为S, 那么我们把它称为S.幸运数字

一个集合中, 用这样或者那样的错误方法却得到正确结果的方法是有限多个还是无限多个?

6) 构成部分平方数序列的元素

部分平方数序列(SPDS)的特征是这个数字能够分为几个部分,每个部分都为平方数. 例如: $506^2 = 256036$, 它可以分为三个部分256/0/36.

C. Ashbacher 指出两个无限分类的部分数构成的SPDS序列有无限多个. 我们推广下他的结论, 指出怎么能够构造出SPDS序列的无限种分类以满足我们所需要的数字形式.

未解决问题1: 441属于SSPDS序列, 且它的平方$441^2 = 194481$ 仍旧属于SSPDS序列. 能否找到m, m^2, m^4 都为SSPDS序列的例子?

未解决问题2: 我们很容易在SSDPS序列中找到两个相邻的平方数, 例如: $12^2 = 144$ 和$13^2 = 169$.

是否SSDPS序列仍旧包含三个或者更多的相邻的平方数? 最大的长度是多少?

7) n个数的周期序列

a) 两个数的周期序列(I)

令$N1$ 为由两个数字构成的整数, $N1'$ 为$N1$ 的两个数字的逆序构成的数. 我们定义绝对值$N2 = abs(N1 - N1')$. 依次有: $N3 = abs(N2 - N2')$, 等等. 如果一个数N仅由一个数字构成, 我们定义它的逆序为$N \times 10$(例如: 5, 即05, 逆序为50). 除了两个数字相等的情形,这个序列具有周期性. 若两个数字相等,此时序列变为:

$$N1, 0, 0, 0, \cdots$$

这样的重复长度总是为5, 且从序列的第二或者第三项开始, 并且周期为9, 81, 63, 27, 45.

b) n个数字的Smarandache 周期序列(II)

假设$N1$是由n个数字构成的一个整数, $N1'$ 是由n个数字的逆序构成的数. 我们定义绝对值$N2 = abs(N1 - N1')$. 依次有: $N3 = abs(N2 - N2')$, 等等. 如果构成数N的数字少于n个, 我们定义它的逆序为$N' \times (10^k)$, where N' 为N的逆序, k为缺少的数字的个数. (例如: 24 少于5个数字, 但是能够表示为00024, 它的逆序为42000). 根据Dirichlet 的盒子原理, 这个序列是具有周期性的

Smarandache 3个数字的周期序列(范围为$100 \leq N1 \leq 999$):

-有90个对称的整数, $101, 111, 121, \cdots$, 其中$N2 = 0$;

-所有其他的原始整数形式虽然不同, 但都为相同的五项周期序列:

$$99, 891, 693, 297, 495.$$

Smarandache 4个数字的周期序列(范围为$1000 \leq N1 \leq 9999$):

-最大的周期循环数应该从第一个数字开始长度为18处循环. 当$N1 = 1019$时便会出现;

-整数8818的循环导致如下的循环长度: 2178, 6534; or 90, 810, 630, 270, 450; 或者909, 8181, 6363, 2727, 4545; or 999, 8991, 6993, 2997, 4995;

-其他的循环从不变量0处结束. (H. Ibstedt)

8) Erdos-Smarandache 数: 丢番图方程$P(n) = S(n)$的解:

$$2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, \cdots.$$

其中$P(n)$ 为整除n的最大素数因子, $S(n)$ 是经典的Smarandache 函数: 最小的整数使得S(n)! 为n的乘积.

7.9 Smarandache多边性(折线) 定理(Ceva定理的推广)

在文章中, 我们给出了著名的Ceva 定理的三个推广, 其中Ceva定理表述为: 如果在一个三角形ABC 中画出共点直线AA_1, BB_1, CC_1, 则有

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

引理7.9.1 *对于多边形$A_1A_2\cdots A_n$, 点M 在它的平面上, 循环置换*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix},$$

对所有的i 和j, $j \in \{i+s, \cdots, i+s+t-1\}$, 令$M_{ij}$ 是直线A_iM 和直线$A_{i+s}A_{i+s+1}, \cdots$,
$A_{i+s+t-1}A_{i+s+t}$ 的交点. 对所有的指标, 如果$M_{ij} \neq A_n$, 并且$2s+t=n$, 则有

$$\prod_{i,\ j=1,\ i+s}^{n,\ i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = (-1)^n,$$

其中s, t是非0自然数.

分析证明 令M 是三角形ABC 所在平面上的一个点, 并且其满足定理的条件. 选择笛卡尔坐标系, 使得平行于坐标轴的两条直线通过点M, 但不通过任意的A_i 点(这是可能的).

考虑点$M(a,\ b)$ 和点$A_i(X_i,\ Y_i)$, 其中$a,\ b$ 是实变量, $X_i,\ Y_i$ 是已知的($i \in \{1,2,\cdots,n\}$).

前面的选择可以确保成立下面的关系:

对所有的$i \in \{1,2,\cdots,n\}$, $X_i - a \neq 0$, $Y_i - b \neq 0$. 关于直线$A_iM(1 \leq i \leq n)$ 的等式是:

$$\frac{x-a}{X_i-a} - \frac{y-b}{Y_i-b} = 0.$$

注意到, $d(x,\ y;\ X_i,\ Y_i) = 0$. 我们有

$$\frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = \frac{\delta(A_j,\ A_iM)}{\delta(A_{p(j)},\ A_iM)} = \frac{d(X_j,\ Y_j;\ X_i,\ Y_i)}{d(X_{p(j)},\ Y_{p(j)};\ X_i,\ Y_i)} = \frac{D(j,\ i}{D(p(j),\ i)},$$

其中，$\delta(A,\ ST)$ 是A 到直线ST 的距离，并且注意到$D(a,\ b)$ 是对于$d(X_a,\ Y_a;\ X_b,\ Y_b)$ 而言的.

下面我们来计算乘积，其中我们会用到以下约定:

$a+b$ 表示

$$\underbrace{p(p\cdots p}_{b次}(a)\cdots)),$$

$a-b$表示

$$\underbrace{p^{-1}(p^{-1}\cdots p^{-1}}_{b次}(a)\cdots)).$$

则

$$\begin{aligned}
\prod_{j=i+s}^{i+s+t-1}\frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}} &= \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1}\frac{D(j,\ i)}{D(j+1,\ i)}\\
&= \frac{D(i+s,\ i)}{D(i+s+1,\ i)}\cdot\frac{D(i+s+1,\ i)}{D(i+s+2,\ i)}\cdots\frac{D(i+s+t-1,\ i)}{D(i+s+t,\ i)}\\
&= \frac{D(i+s,\ i)}{D(i+s+t,\ i)}=\frac{D(i+s,\ i)}{D(i-s,\ i)}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}\frac{D(i+s,\ i)}{D(i-s,\ i)}=\frac{D(1+s,\ 1)}{D(1-s,\ 1)}\cdot\frac{D(2+s,\ 2)}{D(2-s,\ 2)}\cdots\frac{D(2s,\ s)}{D(n,\ s)}\cdot\frac{D(2s+1,\ s+1)}{D(1,\ s+1)}\\
&\cdot\frac{D(2s+2,\ s+2)}{D(2,\ s+2)}\cdots\frac{D(2s+t,\ s+t)}{D(t,\ s+t)}\cdot\frac{D(2s+t+1,\ s+t+1)}{D(t+1,\ s+t+1)}\\
&\cdot\frac{D(2s+t+2,\ s+t+2)}{D(t+2,\ s+t+2)}\cdots\frac{D(2s+t+s,\ s+t+s)}{D(t+s,\ s+t+s)}\\
&=\frac{D(1+s,\ 1)}{D(1,\ 1+s)}\cdot\frac{D(2+s,\ 2)}{D(2,\ 2+s)}\cdots\frac{D(2s+t,\ s+t)}{D(s+t,\ 2s+t)}\cdots\frac{D(s,\ n)}{D(n,\ s)}\\
&=\prod_{i=1}^{n}\frac{D(i+s,\ i)}{D(i,\ i+s)}=\prod_{i=1}^{n}\left(-\frac{P(i+s)}{P(i)}\right)=(-1)^n.
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{D(r,\ p)}{D(p,\ r)}=\frac{\dfrac{X_r-a}{X_p-a}-\dfrac{Y_r-b}{Y_p-b}}{\dfrac{X_p-a}{X_r-a}-\dfrac{Y_p-b}{Y_r-b}}=-\frac{(X_r-a)(Y_r-b)}{(X_p-a)(Y_p-b)}=-\frac{P(r)}{P(p)}$$

注意到, $(X_t-a)(Y_t-b)=P(t)$ 从而得到上面的最后一个等式. 又对所有的$t\in\{1,2,\cdots,n\}$, $P(t)\neq 0$. 从而完成证明.

关于定理7.9.1的评论 t代表多边形的边和直线$A_{i_0}M$ 相交的数目; 注意到多边形的边A_iA_{i+1}, 相对应于a_i, 则$s+1$ 代表和直线A_1M 相交的第一条边的序号(即a_{s+1} 表示和A_1M 相交的第一条边).

例如: 如果$s=5$, $t=3$, 定理意味着:

- 直线A_1M 相交于边A_6A_7, A_7A_8, A_8A_9.
- 直线A_2M 相交于边A_7A_8, A_8A_9, A_9A_{10}.
- 直线A_3M 相交于边A_8A_9, A_9A_{10}, $A_{10}A_{11}$ 等等.

观察: 定理的限制条件对于比率$\dfrac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}}$ 的存在性而言是必要的.

结论7.9.1 设点M在多边形$A_1A_2\cdots A_{2k+1}$的平面上, 对所有的$i\in\{1,2,\cdots,2k+1\}$, 令M_i 是直线$A_iA_{p(i)}$ 和穿过点M及相对直线的定点的直线的交点. 如果M_i不属于$\{A_i, A_{p(i)}\}$, 则有$\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\overline{M_iA_i}}{\overline{M_iA_{p(i)}}}=-1$.

如果取$s=k$, $t=1$, 即$n=2k+1$, 则从定理1中将很快得到这个结果的证明.

这个结论的相反方面不成立.

从而我们可以很快得到定理1的相反方面也部不成立.

反例:

考虑5边形. 画出直线A_1M_3, A_2M_4, A_3M_5相交于M.

令$K=\dfrac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_4}}\cdot\dfrac{\overline{M_4A_4}}{\overline{M_4A_5}}\cdot\dfrac{\overline{M_5A_5}}{\overline{M_5A_1}}$

画出直线A_4M_1 使得它不穿过M, 并且形成比率:

$$\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}}=\frac{1}{K}\text{或}\frac{2}{K}(\text{选取其中一个值，对它而言,}A_4M_1\text{不通过点}M). \quad (7\text{-}7)$$

最后追溯到A_5M_2, 形成比率$\dfrac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}}=-1$ 或$-\dfrac{1}{2}$.

因此乘积:

$\prod\limits_{i=1}^{5}\dfrac{\overline{M_iA_i}}{\overline{M_iA_{p(i)}}}=-1$ 没有直线共点.

结论7.9.2. 在定理7.9.1的条件下, 如果对所有的i 和j, j 不属于集合$\{i,\ p^{-1}(i)\}$, 注意到$M_{ij} = A_iM \cap A_jA_{p(j)}$, 并且$M_{ij}$ 不属于集合$\{A_j,\ A_{p(j)}\}$, 则有$\prod\limits_{i,\ j=1}^{n} \dfrac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = (-1)^n$.

取$s = 1,\ t = n-2$, 则有$2s + t = n$.

结论7.9.3 对于$n = 3,\ s = 1,\ t = 1$, 则(作为一种特殊情形)得到了Ceva定理.

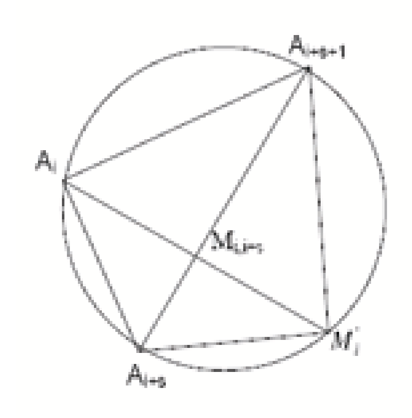
Ceva定理的推广的应用

定理7.9.2 考虑嵌入圆内的多边形$A_1A_2\cdots A_n$, 令s, t是两个非0自然数使得$2s + t = n$. 每个顶点A_i通过一条直线d_i, 和边$A_{i+s}A_{i+s+1}, \cdots, A_{i+s+t-1}A_{i+s+t}$分别相交于点$M_{i,i+s}, \cdots, M_{i,i+s+t-1}$, 和圆相交于点$M_i'$, 则有$\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=i+s}^{i+s+t-1} \dfrac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}} = \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\overline{M_i'A_{i+s}}}{\overline{M_i'A_{i+s+t}}}$.

证明: 令i 固定,

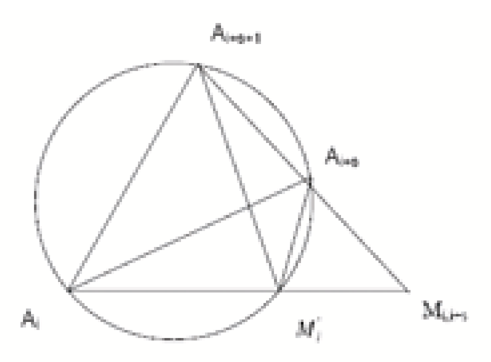
1) 点$M_{i,i+s}$在圆内. 三角形$A_iM_{i,i+s}A_{i+s}$和$M_i'M_{i,i+s}A_{i+s+1}$相似, 因为角$M_{i,i+s}A_iA_{i+s}$和角$M_{i,i+s}A_{i+s+1}M_i'$, 以及角$A_iM_{i,i+s}A_{i+s}$和角$A_{i+s+1}M_{i,i+s}M_i'$ 分别相等. 从而有

$$\frac{\overline{M_{i,i+s}A_i}}{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s+1}}} = \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{M_i'A_{i+s+1}}}. \tag{7-8}$$



同理, 三角形$M_{i,i+s}A_iA_{i+s+1}$和$M_{i,i+s}A_{i+s}M_i'$相似, 则有

$$\frac{\overline{M_{i,i+s}A_i}}{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s}}} = \frac{\overline{A_iA_{i+s+1}}}{\overline{M_i'A_{i+s}}}. \tag{7-9}$$



(7 − 8)式和(7 − 9)式相除得

$$\frac{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s}}}{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s+1}}} = \frac{\overline{M_i'A_{i+s}}}{\overline{M_i'A_{i+s+1}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+1}}}. \tag{7-10}$$

2) 点$M_{i,i+s}$在圆外的情况和第一种情况类似, 因为我们可以利用相同的解释得到在1)中标示的三角形在这种情况下仍是相似的, 则得到相同的比值, 从而式(3)亦成立.

下面我们计算乘积:

$$\prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}} = \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \left(\frac{\overline{M_i'A_j}}{\overline{M_i'A_{j+1}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_j}}{\overline{A_iA_{j+1}}} \right)$$

$$= \frac{\overline{M_i'A_{i+s}}}{\overline{M_i'A_{i+s+1}}} \cdot \frac{\overline{M_i'A_{i+s+1}}}{\overline{M_i'A_{i+s+2}}} \cdots \frac{\overline{M_i'A_{i+s+t-1}}}{\overline{M_i'A_{i+s+t}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+1}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s+1}}}{\overline{A_iA_{i+s+2}}} \cdots \frac{\overline{A_iA_{i+s+t-1}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}}$$

$$= \frac{\overline{M_i'A_{i+s}}}{\overline{M_i'A_{i+s+t}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}}.$$

因此, $\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{M_i'A_{i+s}}}{\overline{M_i'A_{i+s+t}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}} \right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{M_i'A_{i+s}}}{\overline{M_i'A_{i+s+t}}}$,
因为

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}} = \frac{\overline{A_1A_{1+s}}}{\overline{A_1A_{1+s+t}}} \cdot \frac{\overline{A_2A_{2+s}}}{\overline{A_2A_{2+s+t}}} \cdots \frac{\overline{A_sA_{2s}}}{\overline{A_{s+1}A_1}}$$

$$\cdot\frac{\overline{A_{s+2}A_{2s+2}}}{\overline{A_{s+2}A_2}}\cdots\frac{\overline{A_{s+t}A_n}}{\overline{A_{s+t}A_t}}\cdot\frac{\overline{A_{s+t+1}A_1}}{\overline{A_{s+t+1}A_{t+1}}}\cdot\frac{\overline{A_{s+t+2}A_2}}{\overline{A_{s+t++2}A_{t+2}}}\cdots\frac{\overline{A_nA_s}}{\overline{A_nA_{s+t}}}=1,$$

(考虑到$2s+t=n$).

结论7.9.4 如果有多边形$A_1A_2\cdots A_{2s-1}$内接于圆, 从每个顶点A_i引出一条直线d_i, 和对边$A_{i+s-1}A_{i+s}$相交于点M_i, 和圆相交于点M_i', 则有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{M_iA_{i+s-1}}}{\overline{M_iA_{i+s}}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{M_i'A_{i+s-1}}}{\overline{M_i'A_{i+s}}}.$$

事实上，对于$t=1$, 则有n为奇数，且$s=\dfrac{n+1}{2}$.

在这个结论中，如果取$s=1$, 则得到在文献[1]的35-37页中的数学注释.

应用： 如果在定理7.9.2中, 直线d_i是共点的, 则有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{M_i'A_{i+s}}}{\overline{M_i'A_{i+s+t}}}=(-1)^n.$$

7.10 Smarandache 假设：在宇宙中没有速度障碍

在这篇文章中, 作为Einstein-Podolski-Rosen 悖论以及Bell不等式的延伸和结果, 有人提出这样的假设:在宇宙中没有速度障碍, 可以构造出任何速度, 当然有人质疑是否无限速度(瞬时传输)是可能的?

进一步研究: 研究比光速还快的速度的复合, 以及在比光速还快的速度下, 物理定律将会发生怎样的变化?

1. 引言：

科学上有什么新的发现(物理学上的)? 来自于奥地利的Innsbruck大学和美国国家标准与技术研究院(1997年在Rainer Blatt, David Wineland et al.成立)的共同组成员的研究表明：

- 光子是一点光，电磁辐射的量(量子是一个系统能够获得或失去的最小的能量);

- 极化指的是光波震动的方向和特性;

- 如果有人使用缠绕现象在两个光子之间转变极化, 那么无论一方发生了什么，另一方总是向相反的方向变化. 因此, 它们的极化是彼此相反的;

- 在量子力学上, 物体比如次原子微粒在任意给定的短暂的瞬间没有具体的, 固定的特性, 直至它们被测量;

- 假设某一个物理过程产生了一对缠绕微粒A和B(有相反或互补的特性), 以相反的方向飞速滑入空间，当它们之间相距几十亿里远的时候，有人测量了粒子A, 因为B是相反的，则测量A的瞬间告知人们B是怎样的，因此那些指示将在A和B之间以比光速还快的速度传播, 从而, 人们能够将Einstein-Podolski-Rosen 悖论和Bell不等式进行延伸并断言光速在宇宙中没有速度障碍;

- 这些结果也可以通过Nicolas Gisin 在瑞士的日内瓦大学的研究获得. 他成功的在两个超过2 公里盘绕电缆的实验室之间研究量子, 但是实际上两个实验室间的距离大约是55米;

- 来自于维也纳大学和奥地利科学院的研究(Rupert Ursin等人成功的实施了光粒子在横跨奥地利的多瑙河600 米的距离上的传输); 来自于澳大利亚国立大学和许多其它地方的研究.

2. 科学的假设：

我们提出了这样的假设：在宇宙中没有速度障碍, 这一点可以在理论上被逐步证明，在前面的例子中, 当测量A 的时候, A和B之间的距离可以尽可能的大.

3. 公开讨论：

如果空间是无限的，最大速度也是无限的吗?

“Smarandache 假设被科学家们有争议地解释, 有人说它违犯相对论以及因果原理, 另一些人支持这种观点, 他们认为, 这种假设对于没有实际物理块或虚构物理块的粒子起作用, 不是局部的, 通过穿透效果或超维的.” (Kamla John)

Scott Owens在2001年1月22日的电子邮件(最后转寄它到作者)中对Hans Gunter的回答：“Smarandache假设能够被应用的唯一一点是实体没有实际的物理块或能量或其它信息, 我能提出的最好例子是，光子的波前速度和相速度之间的差距. 通常都是相速度超过波前速度, c. 但这并不意味着任何实际能量能够以超过c的速度传播. 因此，构造从0到无穷大的任意速度都是可能的，但是这种速度只能应用于纯想象的实体.”

加速光子(或另一种譬如以$0.99c$的速度运行的微粒)从而得到大于c的速度可能吗(其中c为光速)?

以后的可能的研究.

在下面的情形下，研究速度v与w的合成是有意义的:

$v < c$且$w = c$

$v = c$且$w = c$

$v > c$且$w = c$

$v > c$且$w > c$

$v < c$且$w = \infty$

$v = c$且$w = \infty$

$v > c$且$w = \infty$

$v = \infty$且$w = \infty$

在上面的每中情况下，物理定律将会发生怎样的变化?

7.11 Smarandache量子色动力学公式

为了改善当捆绑的时候, 应用在夸克和反夸克组合的光子色动力学(QCD)定理中的这种无色的组合, 我们给出了下面的公式:

$$Q - A \in \pm M3, \tag{7-11}$$

其中$M3$是3的倍数.

例如, $\pm M3 = \{3 \cdot k | k \in Z = \{\cdots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \cdots\}$, 且$Q$为夸克的数目, A为反夸克的数目

(5)等价于：

$$Q \equiv A (\text{mod } 3) \tag{7-12}$$

(Q同余于A模3).

为了证明这个公式, 我们注意到3个夸克形成一个无色组合, 任何3的倍数($M3$)的夸克的组合也是如此, 例如 6, 9, 12等的夸克的组合. 同理, 3个反夸克也形成一个无色组合, 任何3的倍数($M3$)的反夸克的组合也是如此, 例如 6, 9, 12等的反夸克的组合. 因此, 当我们混合夸克和反夸克的组合时, 夸克和反夸克将会彼此抵消它们的颜色, 从而剩下的是3的倍数个夸克数, (在这种情形下, 夸克的数目多于反夸克的数目, 公式(5)中的差取正号), 或是3的倍数个反夸克数, (在这种情形下, 反夸克的数目多于夸克的数目, 公式(5)中的差取负号).

夸克和反夸克组合.

我们记q为夸克, 属于集合{上, 下, 顶, 底, 怪, 魔}, a为反夸克, 属于集合{上$'$, 下$'$, 顶$'$, 底$'$, 怪$'$, 魔$'$}.

因此, 对于n个夸克和反夸克组合, $n \geq 2$, 应用无色性, 我们得到下面的可能情形:

如果$n = 2$, 有：qa(双夸克-例如介子和反介子)

如果$n = 3$, 有：qqq, aaa(三夸克-例如重子和反重子)

如果$n = 4$, 有：$qqaa$(四夸克)

如果$n = 5$, 有：$qqqqa$, $aaaaq$(五夸克)

如果$n = 6$, 有：$qqqaaa$, $qqqqqq$, $aaaaaa$(六夸克)

如果$n = 7$, 有：$qqqqqaa$, $qqaaaaa$(七夸克)

如果$n = 8$, 有：$qqqqaaaa$, $qqqqqqaa$, $qqaaaaaa$(八夸克))

如果$n = 9$, 有：$qqqqqqqqq$, $qqqqqqaaa$, $qqqaaaaaa$, $aaaaaaaaa$(九夸克)

如果$n = 10$, 有：$qqqqqaaaaa$, $qqqqqqqqaa$, $qqaaaaaaaa$(十夸克) 等等.

7.12 Smarandache 语言学悖论

本节通过实例和解释来介绍语言学悖论.文章中介绍的实例通过严格的方式描述了英语的语言结构. 为了找到具体的悖论例子, 我们从语法上调整了句子的结构.

设N、V、A分别代表名词、动词和特性.非N、非V、非A分别代表他们的反义词.例如,如果A是"小"，则非A是"大" 或"多",等等.

同样地,设N', N''代表N,或即使N的同义词.同理$V'V''$等等,A', A'', 等等. 设NV代表名词性的动词,NV'代表它的同义词. 于是,定义接下来的语言学悖论和半悖论:

1. 非N是更好的N. 非A是更好的A. 非V是更好的V.

例：不发言有时是更好的演说.

不解释是更好的解释.

没有吸引力有时是更好的吸引力.

慢有时候比快更快.

没有政府是更好的政府.

无统治者比统治者更好.

没有新闻是好的新闻.

不凝视有事比看见更好.
不去爱是更好的爱.
不移动是更好的移动.
不礼貌是更好的礼貌.
没有听见比听见好.
没有反应有时是更好的反应.
没有展示友好是更好的友好（福利）.
她比她自己好.
没有战斗比战斗好（也就是没有暴力的战斗）.

2. 只有N是真正的非N. 只有V是真正的非V. 只有A是真正的非A.

例如：
只有谣言是真正的流言蜚语.
只有小说是真的事实.
只有正常是真正的非正常.
没有人是真的某人.
朋友是隐藏最危险的敌人.
只有你是真的非你(=你行动奇怪).
只有仁慈是真的无情.
如果你向天空吐痰,它将会掉在你的脸上.
只有温柔才是真的野蛮.

3. 这是如此的A使得它显得非A.

例如：
这是如此的真实使它显得虚伪.
这是如此的成熟使它显得变质.
这是如此的友好使它显得不友善.
他似乎如此可靠使他看着不可靠.
这是如此的虚假使它显得真实.
这是如此的适合使它显得不适合.
这是如此的美丽使它显得不真实.
这是如此的简单使它显得很困难.
这个故事如此的真实使它显得是虚构的.
难道看不到为了组成森林的树木吗?

4. 有些N同时是A和非A.

例如：有些事件同时是好的和坏的.

有些法律同时是好的和坏的.
有些新闻同时是真实的和错误的.
有些昆虫同时是有益和危险的.(比如蜘蛛)
有些人同时是英俊和丑陋的.
有些课程同时是有趣和无聊的.
有些大臣同时是可信的和不可信的.
有些时刻同时是甜蜜和酸楚的.
有些游戏同时是有挑战的和没有竞争力的.
食物同时是热和冷的.
游戏是有激情的,然而无趣的（因为我们失败了）.
人们同时是智慧和愚蠢的(也就是说,有些方面智慧,其他方面愚蠢).

5. 有些N是V,实际上同时非V.

例如: 人们欺诈,实际上同时不是欺诈.
有些人玩,同时又没有在玩.
有些生活的经验是惩罚,同时又是奖励.
锻炼是疲倦的,但又是使人精神充沛的.
有些小孩在听,实际上同时又没有在听.
有些老师在讲授,同时又没有在讲授.
有些人在拼写,同时又在拼错.
人们的美好和粗俗是互相附随的.
政治家总是同时在说谎和说真话.

6. V,即使非V.

例如: 圣人思考,即使当他不思考.
我存在当我不存在.
小丑是有趣的,即使他自己不是有趣的.
被渴死的人四周都是水.
作为诗人不知道自己是诗人.
去相信即使你不相信.
正在比赛即使没有在比赛.
我在睡觉，即使当我醒着.
总是跑来跑去.
做梦,即使并没在睡觉.

7.N是足够的非N.

例如:沉默是足够的吵闹.
来自工作的假期是艰苦的工作.

优越性带来足够的劣势.
白天是我的黑夜.
日记是足够的非日记.
睡觉是充分的醒着.
甜蜜的诚实是充足的讥讽.
四个人的桌子足够坐6个人.
我有的很足.
这个工作足够的娱乐（当很喜欢这个工作）.

8.非V有时意味着V.

例如: 不发言有时意味着发言.
不接触有时意味着接触.
维持和平有时意味着要去战争.
摧毁生活(例如病毒)有时意味着维持生活.
不去聆听有时意味着在聆听.
两只脚向前有时意味着依然站着.
不乱丢东西有时意味着乱丢.
超速行驶有时不是在超速行驶(紧急情况下).
不表现愤怒有时是在表现愤怒.

9.没有N的N.

例如: 没有地狱的地狱.
没有风格的风格.
规则申请了:没有规则.
我们的文化是缺乏文化.
没有存在的存在.
有些人害怕死亡,他们其实没有活着.
没有工作的工作.
不能和他们一起生活,没有他们不能生活.
没有死亡的死亡[耶稣的死是为了永恒的活着]。
没有内疚的内疚(有时是内疚，但不感到内疚).

10. a) 非N中的N.

例如: 静止中的动态.
吵闹中的沉默.
自由中的奴役.
人群中的孤独.
圆圈中的圆圈.

矩形部分内的摔跤圆.
在贫穷中寻找财富[也就是说,快乐和爱].
10. b) N中的非N.
例如:
动态中的静止.
沉默中的吵闹.
风暴的眼睛.
政治,官僚政治.
平等中的不平等.
婚姻中的孤独.
快乐中的愤怒.
寒冷中的温暖.
热度中的寒冷.
没有欢乐的大笑.
任何地方都得不到.
财富中的贫乏.[在富裕的家庭里没有爱和贫困].
11.非A的A.
例如: 光线的阴影.
沉默的音乐.
锻炼作用的放松.
自由的限制.
通过死亡的生活.
沉默的声音/喧闹.
我能看到隧道里的光线.
自由的奴隶.[有些人甚至在婚姻中都不愿放弃他的自由].
12. V非V.
例如:看不能看的.
去听不能听的.
去品尝不能品尝的.
去尝试不能理解的.
去说不能说的[说出秘密].
去耐心等待不知道如何等待的.
去呼吸不能呼吸的.
去赏识被轻视的.
去相信不能相信的[信赖].

去嗅不能嗅的.

13.让我们用非V来V.

例如: 让我们通过不打击来打击.

让我们通过不谈话来交流:[意味着思考]

表决通过不投票.

帮助某人通过不动手帮助[作为一个老师通过经验].

让我们通过不辩解来辩解.

让我们通过没赢来获赢.

让我们通过不剥夺来剥夺.

让我们通过不战斗来战斗.

14.非N的N.

例如: 我们从没有利润中获得的利润.

我们从非吸烟者那里得到的烟味.

我们从艰苦工作中得到的奖励.

我们从非服务那里得到的服务.

来自坏的好.

我们从痛苦中得到的快乐.

15.非A 是A.

例如: 坏的是好的[因为它使我们更加努力].

好的是坏的[因为它使我们没有改进的地放].

工作是一种福气.

贫穷是精神上的富裕.

有时丑陋是美丽的[因为美丽是眼中的感激].

在你发现王子之前,你不得不亲吻一群青蛙.

伤痛是有治疗作用的.

"没有绝对"是绝对的.

不承认任何错误是一个错误.

16.一个非N的N.

例如: 一个积极的消极.[意思是:一次失败迫使你做的更好]

一个伤心的幸福.

一个不可能的可能性.

真的人造的皮革.

一个大声的小声耳语.

一个美丽的灾难.意思是[美丽可以在任何地方被发现].

一个苦涩的甜蜜.

一个严厉的文雅[坚持你的文雅].

一个无罪的罪人[不为自己的罪恶感到后悔的人].

17.每件事都有一个A和一个非A.

例如: 每件事都有一个意义和一个非意义.

每件事都有一个正确面和一个错误面.

每件事都有一个开始和一个结束.

每件事都有一个出生和一个死亡.

每件事都有一个出现和一个非出现.

我们周围的每件事被解决和溶化.

每个人有好的一面和坏的一面.

每个人有一个对和一个错.

18.V什么非V.

例如: 成为你不是的.

需要不必须的.

期待想不到的.

文化通过它的不存在存在.

无论我们多有钱,我们都不能挣足够多的钱.

购买不能购买的.

工作当我们没在工作时.

死亡可能意味着永远活着.

想要因为不想要[有时想要只是因为喜欢它].

看看这些有趣的法律例子:

一个喜欢用矛盾说话的政府: 假设你有两头母牛,那么政府杀了它们并且挤了它们的奶!

这些创作的语言悖论目录无限的在扩充.它是具体的语言,它以语言表达和句型,短语的构造和结构为基础. 我们还可以通过反义的副词,介词等等来构造其它种类的语言悖论.

7.13 量子Smarandache拟悖论和量子Smarandache诡辩论悖论

多悖论和诡辩论悖论产生于物理学中量子和非量子的结合. 甚至通过微观经济和宏观经济的互惠产生了很多未解决的问题和反直觉的思想. 我们定义拟悖论是一个自相矛盾或者明显矛盾的初步印象但又未完

全证明是悖论的一种陈述.我们提出以下四个基本量子拟悖论,及其相应量子诡辩论悖论,构成了一类量子诡辩论悖论.

1 介绍

依照数学辞典,悖论是”一个显然荒唐或者自相矛盾的陈述,它是起源于显而易见无懈可击前提的一个初步印象,或是显然的矛盾”. 一些悖论要求修改它们直接的概念(Russell悖论,Cantor悖论),一些悖论取决于描述的不可容性(Grelling悖论),还有一些展示的是反直觉的定理(实质蕴涵悖论,Skolem 悖论),另外一些是自相矛盾的.[Smarandache 悖论:”所有的是A,非A也是,A是一个特征,非A是它的相反.例如”一切都有可能,一切也是不可能的.”(Weisstein,1998)]. 通常,悖论是同时的真和假.

诡辩论悖论和第四世纪的Eubulides of Miletus的观点结合.他们说没有一个清楚的边界存在于有形和无形的事物之间,决定论者和非决定论者的原则之间,稳定的和非稳定的事物间,长时存在和短时存在的事物.一般地,A和非A之间没有一个明显的区分和精确的边缘.A在什么地方真正结束？非A在什么地方开始?”模糊集”概念趋向于”中智集合论”概念. 现在我们介绍拟悖论的概念: 一个拟悖论是一份声明中已初步证据确凿的自我矛盾的明确支持或矛盾,但没有完全被证明是一个矛盾一个拟悖论是一个非正式的矛盾声明,而悖论是一个正式的矛盾声明. 下面的一些量子拟悖论能够被证明是一个正真的量子悖论.

2 量子拟悖论和量子诡辩论悖论.

以下的拟悖论和诡辩论悖论的基础是二律相悖:有形的/无形的,宿命论者/非命运论者,稳定的/不稳定的,长时存在/短时存在, 同时,事实是这些成对的矛盾没有明确的分离点.

2.1.1）无形的拟悖论:我们有形的世界是由整个无形的颗粒组成的.

2.1.2）无形的诡辩论悖论:在有形和无形的事物之间没有一个清楚的分界线.

a)一个无形的颗粒不能产生一个有形的物体,也不能产生二个无形的颗粒,三个无形的颗粒等等. 然而,在某些方面,无形的颗粒的积聚变的足够大以致产生一个有形的物体.但是显然我们很难确定这个产生变化的临界点在哪里.

b)一个类似的悖论可以发展到它的相反面.从一个有形的物体中剔除掉一个颗粒,这个物体可能依然是一个有形的物体.然而,继续重复这个

过程,在某点上,这个有形的物体会腐烂到变成无形.但是我们无法定义这个发生变化的临界点在哪里.

2.2.1）不确定的拟悖论:在某些程度,大的物体在宿命者论的原则下由基本的颗粒的整体产生,这是在Heisenberg的"不定论"下实现的.

2.2.2）不确定的诡辩论悖论:类似地,"宿命者论原则"下的事物和"非命运者论原则"下的事物没有明晰的分界点.

2.3.1)不稳定的拟悖论: "稳定的"事物是由"不稳定的"基本颗粒形成的.(基本颗粒在释放的时候会腐烂消失).

2.3.2）不稳定的诡辩论悖论:类似地,"稳定的"事物和"不稳定的"事物之间没有明确的分界点.

2.4.1）短时存在的拟悖论:"长时存在"的事物由"短时存在的"基本颗粒形成。

2.4.2）短时存在的诡辩论悖论:类似地,"短时存在"的事物和"长时存在的" 事物之间没有明确的分界点.

3 结论

更多这样的量子拟悖论和悖论被设计出,所有这些悖论组成了一类Smarandache量子拟悖论. (M.Khoshnevisan博士,格里菲斯大学,黄金海岸(加纳),昆士兰州,澳大利亚.)

参考文献

[1] F. Smarandache, Only Problems, Not Solutions [M], Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Farris Mark and Mitchell Patrick, Bounding the Smarandache function [J], Smarandache Notions Journal, Vol. 13(2002), 37-42.

[3] Liu Yaming, On the solutions of an equation involving the Smarandache function [J], Scientia Magna, Vol.2 (2006), No. 1, 76-79.

[4] Jozsef Sandor, On certain inequalities involving the Smarandache function [J]. Scientia Magna, Vol.2 (2006), No. 3, 78-80.

[5] 徐哲峰, Smarandache 函数的值分布性质[J], 数学学报, Vol.49(2006), No.5, 1009-1012.

[6] Le Maohua, An equation concerning the Smarandache LCM function [J], Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[7] Lv Zhongtian, On the F.Smarandache LCM function and its mean value [J], Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[8] 吕国亮, 关于F.Smarandache LCM 函数与除数函数的一个混合均值[J], 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3), 315-318.

[9] 沈虹, 一个新的数论函数及其它的值分布[J], 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2), 235-238.

[10] 潘承洞, 潘承彪. 初等数论[M], 北京大学出版社, 北京, 2003.

[11] 张文鹏等, 初等数论[M], 陕西师范大学出版社, 西安, 2007.

[12] Wang Yongxing, On the Smarandache function. Research on Smarandache Problem in Number Theory (Edited by Zhang Wenpeng, Li Junzhuang and Liu Duansen). Hexis, Vol.II(2005), 103-106.

[13] Tom.M. Apostol, Introduction to analytic number theory, New York: Springer-Verlag, 1976, 77.

[14] Kenichiro Kashihara, Comments and topics on Smarandache notions and problems, Erhus University Press, USA, 1996.

[15] Guohui Chen, Some exact calculating formulas for the Smarandache function, Scientia Magna, Vol.2(2006), No.2, 95-97.

[16] C.Ashbacher, Some properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff functions, Mathematics and Informatics Quarterly, 7(1997), 114-116.

[17] A.Begay, Smarandache ceil functions, Bulletin of Pure and Applied Sciences, 16E(1997), 227-229.

[18] I.Balacenoiu and V.Seleacu, History of the Smarandache function, Smarandache Notions Journal, Vol. 10 (1999), 192-201.

[19] A.Murthy, Some notions on least common multiples, Smarandache Notions Journal, Vol. 12 (2001), 307-309.

[20] Aledsandar Ivić, The Riemann zeta-function theory, New York, 1985, 407-413.

[21] Fu Jing, An equation involving the Smarandache function. Scientia Magna, Vol.2

(2006), No. 4, 83-86.

[22] F. Smarandache, Sequences of numbers involving in unsolved problem, Hexis, 2006, 17-18.

[23] M.L.Perez, Florentin Smarandache, Definitions, solved and unsolved problems, conjectures and theorems in number theory and geometry, Xiquan Publishing House, 2000.

[24] Jin Zhang, Pei Zhang, The mean value of a new arithmetical function, Scientia Magna, Vol.4, No.1, 2008: 79-82.

[25] Aleksandar Ivić, The Riemann Zeta-function, Dover Publications, New York, 2003.

[26] Jozsef Sandor, On certain generalizations of the Smarandache function, Smarandache Notions Journal, Vol.11 (2000), No.1-2-3, 202-212.

[27] M.N.Huxley, The distribution of prime numbers, Oxford University Press, Oxford, 1972.

[28] A.Ivic. On a problem of Erdös involving the largest prime factor of n. Monatsh. Math., Vol.145(2005), 35-46.

[29] S. Tabirca. About S-multiplicative functions, Octogon, 1999,7: 169-170.

[30] P.Erdös. Problem 6674, Amer. Math. Monthly, Vol.98, 1991, 965.

[31] Jozsef Sandor, On a dual of the Pseudo-Smarandache function [J], Smarandache Notions (Book series), Vol.13(2002), 16-23.

[32] Maohua Le, Two function equations [J], Smarandache Notions Journal, Vol.14(2004), 180-182.

[33] M. Bencze, Aplica.ii ale unor .iruri de recuren.. .n teoria ecua.iilor diofantiene, Gamma (Bra.ov), XXI-XXII, Anul VII, Nr.4-5, 1985, pp.15-18.

[34] Z. I. Borevich - I. R. Shafarevich, Teora numerelor, EDP, Bucharest, 1985.

[35] A. Kenstam, Contributions to the Theory of the Diophantine Equations $Ax^n - By^n = C$. G.

[36] H. Hardy and E.M. Wright, Introduction to the theory of numbers, Fifth edition, Clarendon Press, Oxford, 1984.

[37] N. Iv..hescu, Rezolvarea ecua.iilor .n numere .ntregi, Lucrare pentru ob!inerea titlului de profesor gradul 2 (coordonator G. Vraciu), Univ. din Craiova, 1985.

[38] E. Landau, Elementary Number Theory, Celsea, 1955.

[39] Calvin T. Long, Elementary Introduction to Number Theory, D. C. Heath, Boston, 1965.

[40] L. J. Mordell, Diophantine equations, London, Academic Press, 1969.

[41] C. Stanley Ogibvy, John T. Anderson, Excursions in number theory, Oxford University Press, New York, 1966.

[42] W.Sierpinski, Oeuvres choisies, Tome I. Warszawa, 1974-1976.

[43] F. Smarandache, Sur la résolution d'équations du second degréa deux inconnues dans Z , in the book Généralizations et généralités, Ed. Nouvelle, Fès, Marocco; MR:85h:00003.

[44] David Gorski, The pseudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140-149.

[45] Liu Yanni, On the Smarandache Pseudo Number Sequence [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics. 2006, 10(4): 42-59.

[46] Lou Yuanbing, On the pseudo Smarandache function [J]. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48-50.

[47] Zheng Yanni, On the Pseudo Smarandache function and its two conjectures [J], Scientia Magna. 2007, 3(4): 50-53.

[48] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.

[49] 杜风英, 关于Smarandache函数$S(n)$的一个猜想[J], 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 205-208.

[50] 薛社教, 一个新的算术函数及其均值[J], 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(3): 351-354.

[51] 张文鹏, 关于Smarandache函数的两个问题[J], 西北大学学报, Vol.28 (2008), No.2, 173-175.

[52] 张瑾, 一个包含伪Smarandache函数及其对偶函数的方程[J], 纯粹数学与应用数学, Vol.10 (2008), No.4, 100-104.

[53] Jozsef Sandor, On additive analogues of certain arithmetic function, Smarandache Notions J, Vol.14(2004), 128-132.

[54] Sloane, N.J.A. –Sequence A001223/M0296 in “An On-Line Version of the Encyclopedia of Integer Sequences”.

[55] C.Dumitrescu and V.Seleacu, Some solutions and questions in number theory [M], Erthus Univ Press, Glendale, 1994.

[56] G.H.Hardy, E.M.Wright, An introduction to the theory of numbers [M], Oxford Univ. Press, Oxford, 1981.

[57] H.L.Montgomery and R.C.Vaughan, The Distribution of Squarefree Numbers, Recent Progress in Analytic Number Theory [M], Vol. 1, 247-256.

[58] V.Mladen and T.Krassimir, Remarks on some of the Smarandache's problem, Part 2 [J], Scientia Magna, Vol. 1 (2005), No.2, 1-26.

[59] Xigeng Chen, Two problems about 2-power free numbers, Scientia Magna [J], Vol.2 (2006), No.1, 70-71.

[60] Felice Russo, A set of new Smarandache functions,sequences and conjectures in number, 2000 .

[61] Maohua Le, The function equation $S(n) = Z(n)$, Scientia Magna, 1(2005), No.2, 109-110.

[62] Ashbacher,Charles, On numbers that are Pseudo-Smarandache and Smarandache perfect, Smarandache Notions Journal, 14 (2004), PP.40-41.

[63] Maohua Le, On the Pseudo-Smarandache-Squarefree function, Smarandache Notions Journal, 13(2002), 229-236.

[64] BALACENOIUI, SELEACU V. History of the Smarandache function, Smarandache Notions Journal, 1999, (10): 199-201.

[65] F.Mark, M .Patrick, Bounding the Smarandache function, Smarandache Journal, 13 (2002).

[66] Jian Ge, Mean value of F.Smarandache LCM function [J], Scientia Magna, Vol.3 (2007), No. 2, 109-112.

[67] 潘承洞, 潘承彪, 素数定理的初等证明[M], 上海科学技术出版社, 上海, 1988.

[68] Le Maohua. A conjecture concerning the Smarandache dual functions[J]. Smarandache Notions Journal, 2004(14): 153-155.

[69] Li Jie. On Smarandache dual functions[J]. Scientia Magna, 2006(2): 111-113.

[70] G.H.Hardy and E.M.Wright. An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press, 1981.

[71] R.L.Duncan. A class of additive arithmetical functions. Amer.Math. Monthly, 69(1962), 34-36.

[72] D.R.Heath-Brown, The differences between consecutive primes, Journal of London Math. Soc., Vol. 18(1978), No. 2, 7-13.

[73] D.R.Heath-Brown, The differences between consecutive primes, Journal of London Math. Soc., Vol. 19(1979), No. 2, 207-220.

[74] D.R.Heath-Brown and H.Iwaniec, TO the difference of consecutive primes, Invent. Math., Vol. 55(1979), 49-69.

[75] I.Balacenoiu and V.Seleacu, History of the Smarandache function, Smarandache Notions Journal, Vol. 10 (1999), 192-201. [76] D.R.Heath-Brown, The differences between consecutive primes [J], Journal of London Mathematical Soc., 1978, 18 (2): 7-13.

[77] D.R.Heath-Brown, The differences between consecutive primes [J], Journal of London Mathematical Soc., 1979, 19 (2): 207-220.

[78] Cucurezeanu, I., "Probleme de aritmetica si teoria numerelor", Ed. Tehnica, Bucuresti, 1966.

[79] Patrizio, Serafino, "Generalizzazione del teorema di Wilson alle terne prime", Enseignement Math., Vol. 22(2), nr. 3-4, pp. 175-184, 1976.

[80] Popa, Valeriu, "Asupra unor generalizari ale teoremei lui Clement", Studiisi cercetari matematice, Vol. 24, Nr. 9, pp. 1435-1440, 1972.

[81] Smarandache, Florentin, "Criterii ca un numar natural sa fie prim", Gazeta Matematica, Nr. 2, pp. 49-52; 1981; see Mathematical Reviews (USA): 83a: 10007.

[82] 易媛, 亢小玉, Smarandache 问题研究[M], High American press，American, 2006.

[83] 刘燕妮, 李玲,刘保利, Smarandache 未解决的问题及其新进展[M], High American press，American, 2008.

[84] 王妤, 苏娟丽, 张谨, 关于Smarandache 未理论及其有关问题[M], High American press，American, 2008.

[85] V.Christianto and F.Smarandache, Cultural Advantage for Cities: An Alternative for Developing Countries,InfoLearnQuest, 2008.

[86] Lejeune-Dirichlet, "Vorlesungen über Zahlentheorie", 4te Auflage, Braunschweig, 1894, 38.

[87] Sierpinski, Waclaw, "Cestimsi ce nustim despre numerele prime", Ed.Stiintifica, Bucharest, 1966.

[88] Smarandache, Florentin, "O generalizare a teoremei lui Euler referitoare la congruente", Bulet. Univ. Brasov, Seria C, Vol. XXIII, pp. 7-12, 1981; see Mathematical Reviews: 84j: 10006.

[89] Smarandache, Florentin, "Généralisations et Généralités", Ed. Nouvelle, Fès, Morocco, pp. 9-13, 1984.

[90] Smarandache, Florentin, "A function in the number theory," An. Univ. Timisoara, SeriaSt. Mat., Vol. XVIII, Fasc. 1, pp. 79-88, 1980; see M.R.: 83c: 10008.

[91] Smarandache, Florentin, "Problèmes avec et sans ... problèmes!", Somipress, Fès,

Morocco, 1983; see M.R.: 84k: 00003.
[92] Mudge, Mike, "Smarandache Sequences and Related Open Problems", Personal Computer World, Numbers Count, February 1997.
[93] Mudge, Mike, "Smarandache Sequences and Related Open Problems", Personal Computer World, Numbers Count, February 1997.
[94] Smarandache, Florentin, "Collected Papers" (Vol. II), University of Kishinev, 1997.
[95] Erdos, P., Ashbacher C., Thoughts of Pal Erdos on Some Smarandache Notions, ¡Smarandache Notions Journal¿, Vol. 8, No. 1-2-3, 1997, 220-224.
[96] Sloane, N. J. A., On-Line Encyclopedia of Integers, Sequence A048839.

Research on Smarandache Unsolved Problems

Jianghua Li
Department of Mathematics
Northwest University
Xi'an, Shaanxi, 710127
P. R. China

Yanchun Guo
Department of Mathematics
Xianyang Normal University
Xianyang, Shaanxi, 712000
P. R. China

High American Press

2009



责任编辑：薛艳荣 王锦瑞

封面设计：刘艳艳　杨衍婷

本书主要是作者将硕士期间对**Smarandache** 问题的部分研究成果汇编成册，其中几个章节也给出了国内外学者对这一问题的最新研究成果，关于每一个问题，又介绍了其来源，背景，及其研究现状。主要包括数论函数的均值、恒等式、素数、特殊函数方程的解等一系列问题。希望有兴趣的读者可以对这些结论和新问题进行研究，从而开拓读者的视野，引导和激发读者对这些领域的研究兴趣。

The main purpose of this book is to introduce some research on Smarandache problems, which are get by author during the study for a master's degree period, and some new results of current domestic and foreign scholars are also given in some chapters, about every problem, we introduce its origin, context, current situation. Including the mean value of arithmetic functions, identities, problem of prime number, the solutions of special equations. We hope that the readers could be interested in these issues. At the same time, this book could open up the readers perspective, guide and inspire the readers to these fields.

